Megaminx ja sen ratkaisun ryhmäteoriaa

Hanna Koivisto

Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Pro gradu -tutkielma
Ohjaaja: Jokke Häsä

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Hanna Koivisto

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Megaminx ja sen ratkaisun ryhmäteoriaa

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Helmikuu 2014	58 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Megaminx on dodekaedrinmuotoinen pulmapeli, jonka kaikki 12 sivua ovat erivärisiä. On olemassa myös kuuden värin versioita, joissa vastakkaiset sivut ovat samanvärisiä. Jokaisella sivulla on yksi keskuspala, 5 kulmapalaa ja 5 särmäpalaa. Keskuspalat pysyvät paikallaan, mutta muita paloja voi liikuttaa toistensa suhteen, jolloin yhdellä sivulla voi olla useita erivärisiä paloja. Tehtävänä on palauttaa palat paikoilleen niin, että jokainen sivu olisi yksivärinen. Tässä työssä esitellään tehtävän ratkaisulle eräs algoritmi ja todistetaan, että se toimii kaikissa tapauksissa.

Johdantoluvussa esitellään Megaminx. Toisessa luvussa käydään läpi Megaminxin matemaattinen tausta ja tarvittavia ryhmäteorian käsitteitä. Luvussa 3 esitetään siirtosarjat, joilla pulmapeli saadaan ratkaistua, ja osoitetaan, että esitetyt siirtosarjat riittävät kaikissa tapauksissa. Kaksi siirtosarjaa siirtää paloja oikeille paikoilleen, toinen särmäpaloja ja toinen kulmapaloja. Vastaavasti kaksi siirtosarjaa kääntää paloja oikeaan asentoon, niistäkin toinen särmäpaloja ja toinen kulmapaloja. Neljännessä luvussa tarkastellaan siirtosarjojen syntyä ja vaihtoehtoisia ratkaisutapoja. Liitteissä A ja B käydään vielä läpi nurkka- ja särmäpalojen kombinaatiot, joihin viitataan luvun 3 todistuksissa, kombinaatioiden määrä ja konjugoivat siirrot.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Megaminx, ryhmäteoria, dodekaedri, Rubikin kuutio

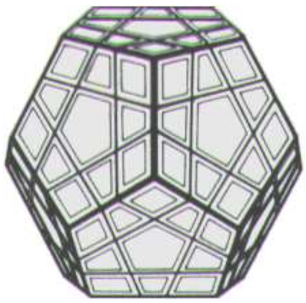
Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

1 Johdanto

Ernő Rubik kehitti vuonna 1974 älypelin, joka nimettiin myöhemmin Rubikin kuutioksi. Sen jälkeen vastaavia pulmapelejä on tullut useita, esimerkkinä Uwe Mèffertin dodekaedrin muotoinen Megaminx. Tässä pelissä sivuja on 12, ja jokainen on muodoltaan säännöllinen viisikulmio. Kullakin sivulla on keskuspala, 5 kulmapalaa ja 5 särmäpalaa. Liikkuvia paloja on yhteensä 50, joista 20 on kulmapaloja ja 30 särmäpaloja. Keskuspalat ovat yksivärisiä, ja kunkin sivun väri määräytyy sen keskuspalasta. Kulmapaloissa värejä on kolme ja särmäpaloissa kaksi. Näitä palojen värillisiä pintoja kutsutaan ruuduiksi. Yhdellä sivulla on siis 11 ruutua, jotka alkuperäisessä asemassa ovat kaikki samanvärisiä.



Kuva 1: Megaminx

Keskuspalat eivät vaihda paikkaa toistensa suhteen, mutta kiertyvät keskipisteensä ympäri. Muut palat liikkuvat tahkoja pyöritettäessä, ja tehtävänä onkin palauttaa sekoitettu kappale alkuperäiseen asemaansa, jossa jokainen sivu on yksivärinen. Megaminxiä myydään sekä kahdentoista että kuuden värin versioina. Näiden variaatioiden ratkaisutavat eroavat hieman toisistaan. Kuuden värin pelissä vastakkaiset sivut ovat samanväriset ja jokaista palaa on kaksi samanlaista, minkä vuoksi lopuksi voidaan päätyä tilanteeseen, jossa vain yksi pala on väärässä asennossa. Tällöin ratkaisu löydetään, kun vaihdetaan kahden samanlaisen palan paikat keskenään. Kahdentoista värin Megaminxissä tällainen tilanne on mahdoton, kuten luvuissa 3.3 ja 3.4 osoitetaan.

Megaminxin ratkaiseminen voidaan suorittaa usealla eri tavalla, mutta siihen on olemassa myös matemaattinen algoritmi, joka nojaa ryhmäteoriaan ja erityisesti permutaatioryhmiin. Tässä tutkielmassa keskitytään esittämään ratkaisu kappaleelle, jonka kaikki sivut ovat eriväriset. Algoritmin idea ja siirtosarja (3.6) ovat peräisin kurssin Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon materiaalista (Häsä 2012), mutta sovelsin ne Megaminxin ratkaisuun sopivaksi. Siirtosarjoihin (3.2), (3.3), (3.10) ja (4.7) on käytetty alkeisoperaatioita Megaminxin ratkaisumallista, jonka on tehnyt Kurt Endl ja joka löytyy Internet-sivulta Mèffert's Megaminx Solution. Särmäpalojen kääntö ja kaikki kombinaatioiden siirtosarjat ovat omiani.

Luvussa 2 käydään läpi Megaminxin matemaattinen tausta ja tarvittavia ryhmäteorian käsitteitä. Luvussa 3 esitetään siirtosarjat, joilla pulmapeli saadaan ratkaistua, ja osoitetaan, että esitetyt siirtosarjat riittävät kaikissa tapauksissa. Luvussa 4 tarkastellaan siirtosarjojen syntyä ja vaihtoehtoisia ratkaisutapoja. Liitteissä A ja B käydään vielä läpi nurkka- ja särmäpalojen kombinaatiot, joihin viitataan luvun 3 todistuksissa, kombinaatioiden määrä ja konjugoivat siirrot.

2 Megaminxin matemaattinen tausta

Käsitellään aluksi itse Megaminxiä ja sen muutoksia ja määritellään esimerkiksi käsitteet ryhmä, permutaatio, perussiirto ja Megaminxin ryhmä. Sen jälkeen käydään läpi muutamia ryhmäteorian käsitteitä, joita tarvitaan myöhemmin tehtävän ratkaisussa. Ryhmän, aliryhmän, normaalin aliryhmän, sivuluokkien ja konjugoimisen käsitteet ovat kirjasta Algebra (Metsänkylä ja Näätänen 2005), muut määritelmät ja Megaminxin ratkaisun idea on sovellettu kurssin Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon materiaalista (Häsä 2012).

2.1 Megaminxin ryhmä

Määritelmä 2.1 (Ryhmä)**.** Olkoon G joukko. Oletetaan, että voidaan liittää G:hen laskutoimitus $*$ siten, että kaikille $a, b \in G$ pätee $a * b \in G$. Paria $(G, *)$ sanotaan *ryhmäksi*, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

G1. Liitäntälaki: Kaikilla $a, b, c \in G$ pätee $(a * b) * c = a * (b * c)$.

G2. Neutraalialkio: On olemassa G:n alkio e, jolle pätee $a * e = e * a = a$ kaikilla $a \in G$.

G3. Käänteisalkio: Jokaista G:n alkiota a kohti on olemassa sellainen G:n alkio a^{-1}, että $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Tällöin sanotaan myös lyhyesti, että G on ryhmä (laskutoimituksen $*$ suhteen).

Määritelmä 2.2 (Aliryhmä)**.** Olkoon G ryhmä. Jos $H \subset G$ ja H on ryhmä G:n laskutoimituksen suhteen, sanotaan että H on G:n *aliryhmä*, ja merkitään $H \leq G$.

Määritelmä 2.3 (Permutaatio)**.** Bijektiota joukolta itselleen sanotaan *permutaatioksi*. Kuvajoukko sisältää kaikki samat alkiot kuin lähtöjoukkokin, mutta jos lähtöjoukon alkioilla on jokin tietty järjestys, kuvaus saattaa palauttaa arvot eri järjestyksessä. Permutaationa voidaankin pitää paitsi itse muutosta myös lopputulosta eli uutta järjestystä.

Esimerkiksi: Jos joukon alkuperäinen järjestys on $(1, 2, 3)$, eräs sen permutaatio voi olla $(1, 3, 2)$. Voidaan myös sanoa, että tehty permutaatio muutti järjestetyn joukon toiseksi. Tällä joukolla voi olla muitakin permutaatioita.

Tarkastellaan joukkoa $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, jolla on permutaatioita yhteensä $n!$. Olkoot niistä kaksi nimeltään f ja g. Koska permutaatiot ovat bijektioita, ne ovat kuvauksia, joilla on käänteiskuvaus. Huomataan, että myös käänteiskuvaukset ovat joukon N_n permutaatioita. On luonnollista yhdistää permutaatioita tavallisten kuvausten tapaan $fg = f \circ g$, mutta täytyy muistaa, että ensin suoritetaan jälkimmäinen kuvaus g (vrt. yhdistetty kuvaus

$(f \circ g)(x) = f(g(x)))$. Permutaatio fg on kahden kuvauksen tulo eli *kuvaustulo*. Minkä tahansa joukon permutaatiot muodostavat ryhmän (*permutaatioryhmän*) kuvaustulon suhteen. Identtinen kuvaus ei muuta alkioiden järjestystä ja on siksi kuvaustulon neutraalialkio.

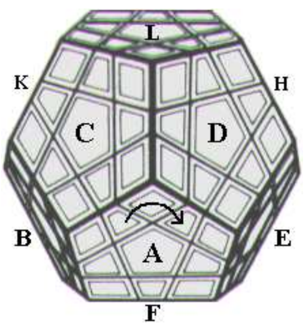
Lause 2.4. *Joukon N_n permutaatiot muodostavat ryhmän kuvaustulon suhteen.*

Todistus. Oletaan, että f, g ja h ovat joukon N_n permutaatioita ja $x \in N_n$. Identtinen kuvaus on kuvaus e. Merkitään kuvauksen f käänteiskuvausta kuvauksella f^{-1}.
G1. $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x)$.
G2. $(f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(x) = e(f(x)) = (e \circ f)(x)$.
G3. $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = e(x) = f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x)$. □

Kutsutaan muodostuvaa ryhmää *symmetriseksi ryhmäksi S_n*.

Kuvitellaan Megaminx käteen siten, että alaspäin olevan tahkon (olkoon valkoinen) yksi särmä on meitä kohti. Nimetään tahkot seuraavasti: edessämme on tahko A (punainen), ja sitä kiertävät vasemmalta myötäpäivään tahkot B:stä F:ään (tummansininen, pinkki, keltainen, tummanvihreä ja valkoinen). Sovitaan lisäksi, että A:n vastakkainen sivu on G (oranssi), B:n H (vaaleansininen) ja niin edelleen, kunnes viimeisenä on sivua F vastassa oleva sivu L, joka on monitahokkaan päällä. Tahkojen nimiä voidaan käyttää avuksi myös paloja nimetessä. Esimerkiksi sivujen A, B ja C yhteinen kulmapala on kulmapala ABC ja vastaavasti sivujen E ja D yhteinen särmäpala on särmäpala ED.

Kun tahkoa käännetään viidesosakierros (72 astetta) myötäpäivään, voidaan tätä kutsua yhdeksi pyöräytykseksi tai *perussiirroksi*. Suunta myötäpäivään on suunta, joka menee myötäpäivään silloin, kun kyseinen tahko on katsojaan päin. Tahkon yksi pyöräytys myötäpäivään nimetään tahkon nimellä. Esimerkiksi meitä kohti olevan tahkon pyöräytys myötäpäivään on A ja sen pyöräytys vastapäivään on edellisen *käänteissiirto* A*.



Kuva 2: Siirto A

Megaminxin perussiirrot ovat pyöräytykset A:sta L:ään. Kun perussiirtoja tai niiden käänteissiirtoja tehdään yksi tai useampi peräkkäin, sanotaan, että tehdään *siirtosarja* tai vain lyhyesti *siirto*. Myös identtinen permutaatio eli se, ettei tehdä mitään, on siirto.

Kaikki Megaminxin ruudut keskiruutuja lukuun ottamatta voidaan nimetä luvuin 1–120. Kun ruutujen paikkoja sekoitellaan, voidaan tätä pitää permutaationa: yhtään ruutua ei häviä eikä tule lisää, vain niiden järjestys vaihtuu. Tällöin Megaminxiä voidaan pitää joukkona N_{120}.

Jokainen siirto on permutaatio ja samalla ryhmän S_{120} alkio. Voidaan helposti nähdä, etteivät kaikki ryhmän S_{120} alkiot ole mahdollisia siirtoja, sillä esimerkiksi särmä- ja kulmapalojen ruudut eivät voi vaihtaa keskenään paikkaa. Monet muutkaan vaihdot eivät ole mahdollisia.

Mahdolliset siirrot muodostavat kuitenkin ryhmän: Kaksi mahdollista siirtoa peräkkäin suoritettuina on uusi, mahdollinen siirto. Myös identtinen permutaatio on mahdollinen siirto ja samalla neutraalialkio. Edelleen tahkon pyörittämisen voi kumota kääntämällä sitä vastakkaiseen suuntaan. Näin ollen kaikilla mahdollisilla siirroilla on käänteissiirto. Määritellään siis symmetrisen ryhmän S_{120} aliryhmä Megaminxin ryhmä.

Määritelmä 2.5 (Megaminxin ryhmä)**.** Numeroidaan kaikki Megaminxin ruudut keskiruutuja lukuun ottamatta luvuin 1–120. *Megaminxin ryhmä* $\mathbb{M}$ on sellainen joukon N_{120} permutaatioiden joukko, jonka jokainen alkio on jokin Megaminxin mahdollinen siirto.

Numeroinnin voi suorittaa usealla eri tavalla ja tapa vaikuttaa määritelmään, mutta käytännössä vain ryhmään kuuluvien permutaatioiden merkintöihin. Numerointitapa ei vaikuta ryhmän rakenteeseen.

Vaikka yleensä yhdistetyssä kuvauksessa suoritetaan ensin oikeanpuoleinen kuvaus, merkitään siirtosarjoissa siirrot suoritusjärjestyksessä vasemmalta oikealle. Jos siis käännetään ensin tahkoa A myötäpäivään ja sen jälkeen tahkoa B vastapäivään, saadaan permutaatio $f = \mathrm{AB}^*$. Jokaisen siirron jälkeen monitahokkaan ruudut ovat jossain järjestyksessä, permutaatiossa. Tätä järjestystä kutsutaan Megaminxin *tilaksi*. Toisinaan käytetään termiä *laillinen tila* korostamaan sitä, että tila on saatu Megaminxin alkuasemasta suorittamalla jokin mahdollinen siirto.

Muotoillaan nyt alkuperäinen ongelma uudelleen. Koska tehtävänä on saattaa Megaminx taas tilaan, jossa kaikki sivut ovat yksivärisiä (*identtinen permutaatio*, merkitään id), tarkoituksena on siis selvittää sekoitetun tilan permutaatio ja ilmoittaa se sitten perussiirtojen (tai niiden käänteissiirtojen) tulona. Tämän jälkeen voidaan suorittaa kyseisen permutaation käänteisalkio, jolloin Megaminx on ratkaistu.

2.2 Hieman ryhmäteoriaa

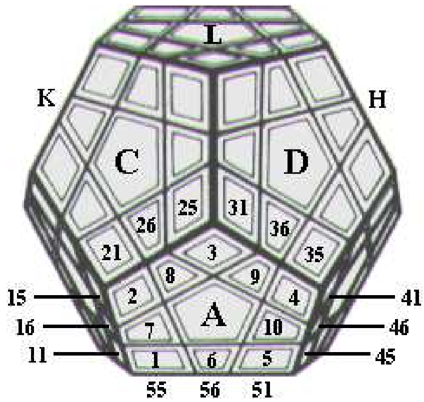
On jo todettu, että Megaminxin siirrot muodostavat ryhmän. Jotta voidaan puhua tämän ryhmän rakenteesta, tarvitaan muutamia ryhmäteorian käsitteitä. Ne käydään läpi seuraavaksi.

Määritelmä 2.6 (Syklit)**.** Olkoon X jokin äärellinen joukko. Jos joukon X jollekin permutaatiolle f löytyy sellainen $x \in X$, että kaikilla $y \in X$ pätee joko $y = f^k(x)$ jollain $k \in \mathbb{N}$ tai $f(y) = y$, sanotaan permutaatiota f *sykliksi*. Tällöin $f^n(x) = x$ jollain $n \in \mathbb{N}$. Pienin tällainen luku n on *syklin pituus*, jolloin sykli on n*-sykli*. 2-sykliä kutsutaan *vaihdoksi*.

Jos esimerkiksi joukon alkioita ovat luvut 1–3, on eräs joukon permutaatio syklimerkinnän avulla esitettynä (1 2 3). Tässä ykkönen kuvautuu kakkoseksi, kakkonen kolmoseksi ja kolmonen puolestaan kuvautuu takaisin ykköseksi. Kyseessä on 3-sykli, joka voitaisiin kirjoittaa myös järjestyksessä (2 3 1). Jokainen permutaatio voidaan kirjoittaa erillisten syklien tulona yksikäsitteisesti lukuun ottamatta sitä, että syklien järjestys ja alkioiden järjestys syklin sisällä voi vaihdella.

Syklien avulla voidaan ilmoittaa mikä tahansa Megaminxin tila. Jos nimetään tahkon A kaikki kulmaruudut vasemmalta alhaalta lähtien myötäpäivään luvuilla 1–5, samoin särmäruudut alhaalta lähtien myötäpäivään luvuilla 6–10 ja samalla logiikalla muut 110 ruutua, saadaan perussiirrolle A sykliesitys

$$\mathrm{A} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10)(11\ 21\ 31\ 41\ 51)(15\ 25\ 35\ 45\ 55)(16\ 26\ 36\ 46\ 56). \tag{2.1}$$



Kuva 3: Ruudut, joihin siirtosarja A vaikuttaa

Tämä on samalla myös se Megaminxin tila, johon päästään tekemällä siirto A. Jos siirto A tehtäisiin kahdesti, olisi tila

$$\mathrm{A}^2 = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)(6\ 8\ 10\ 7\ 9)(11\ 31\ 51\ 21\ 41)(15\ 35\ 55\ 25\ 45)(16\ 36\ 56\ 26\ 46). \tag{2.2}$$

Näiden merkintöjen yksityiskohdilla ei ole merkitystä, tarkoitus on vain osoittaa, että kaikki tilat voidaan nimetä sykliesityksen muodossa. Itse siirrot esitetään käyttäen ainoastaan sivujen nimiä ja käänteissiirron merkkiä.

Jokainen äärellisen joukon permutaatio voidaan kirjoittaa syklien tulona, ja jokainen sykli vaihtojen tulona, esimerkiksi $(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)$. Tämä tarkoittaa, että 2-syklit virittävät koko symmetrisen ryhmän S_n. Jos vaihtoja on parillinen määrä, sanotaan, että permutaatio on parillinen. Muuten se on pariton. Vaihtojen määrän voi laskea helposti: n-sykli voidaan kirjoittaa $n-1$ vaihdon tulona, ja permutaatio $f = g_1 g_2 \dots g_m$, missä jokainen g_k on n_k-sykli, voidaan kirjoittaa tulona, jossa vaihtojen määrä voidaan laskea kaavasta:

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_m - 1). \tag{2.3}$$

Annettu parillinen (tai pariton) permutaatio voidaan kirjoittaa vaihtojen avulla usealla eri tavalla, mutta vaihtojen määrä on aina parillinen (tai pariton). Identtinen permutaatio on aina parillinen. (Häsä 2012, 13–17.)

Tarkastellaan tässäkin esimerkkinä siirtoa A, joka on viiden 5-syklin tulo. Lasketaan vaihtojen määrä kaavasta:

$$(5-1) + (5-1) + (5-1) + (5-1) + (5-1) = 20. \tag{2.4}$$

Siirto A voidaan siis kirjoittaa 20 vaihdon tulona, eli se on parillinen permutaatio. Koska kaikki perussiirrot ovat rakenteeltaan siirron A kaltaisia, huomataan, että kaikki siirrot ja edelleen jokainen Megaminxin laillinen tila on parillinen.

Määritelmä 2.7 (Sivuluokat ja normaali aliryhmä)**.** Olkoon G jokin ryhmä ja H ryhmän G aliryhmä. Kullakin alkiolla $g \in G$ määritellään H:n *vasen sivuluokka* $gH = \{gh \mid h \in H\}$. *Oikea sivuluokka* Hg määritellään vastaavasti. Jos oikeat ja vasemmat sivuluokat ovat samat (kaikilla $g \in G$ on $gH = Hg$), H on G:n *normaali aliryhmä*. Tällöin merkitään $H \trianglelefteq G$.

Määritelmästä voidaan suoraan havaita muutama asia. Jos g on neutraalialkio $e \in H$, on aliryhmän H vasen sivuluokka $eH = H$. Aliryhmä on siis itse yksi sivuluokistaan. Toisaalta kaikilla $g \in G$ pätee $g = g \cdot e \in gH$. Jokainen alkio siis kuuluu johonkin sivuluokkaan. Itse asiassa voidaan todistaa, että jokainen alkio kuuluu täsmälleen yhteen sivuluokkaan. Tämä pätee myös oikeille sivuluokille. (Häsä 2012, 18–19.)

Lause 2.8. *Olkoot $g_1, g_1', g_2, g_2' \in G$. Oletetaan, että H on ryhmän G normaali aliryhmä. Jos $g_1H = g_1'H$ ja $g_2H = g_2'H$, niin $(g_1g_2)H = (g_1'g_2')H$.*

Todistus. Oletetaan, että $g_1H = g_1'H$ ja $g_2H = g_2'H$. Aiemmin todettiin, että jokainen alkio kuuluu täsmälleen yhteen sivuluokkaan eli sivuluokat muodostavat osituksen. Tällöin pätee $(g_1g_2)H = (g_1'g_2')H$ tai $(g_1g_2)H \cap (g_1'g_2')H = \emptyset$. Riittää siis osoittaa, että $g_1g_2 \in (g_1'g_2')H$.

Oletuksen mukaan $g_1 \in g_1'H$, joten $g_1 = g_1'h_1$ jollain $h_1 \in H$. Vastaavasti $g_2 = g_2'h_2$ jollain $h_2 \in H$. Koska H on normaali, pätee $h_1g_2' \in Hg_2' = g_2'H$ eli $h_1g_2' = g_2'h_3$ jollain $h_3 \in H$.

Nyt siis $g_1g_2 = g_1'h_1g_2'h_2 = g_1'g_2'h_3h_2 \in g_1'g_2'H$ eli $g_1g_2 \in g_1'g_2'H$. □

Edellisen lauseen merkitys on siinä, että jos aliryhmä on normaali, alkioiden tulon sivuluokka ei riipu alkioista itsestään vain ainoastaan niiden sivuluokista. Voidaan siis määritellä sivuluokille laskutoimitus ehdolla $g_1H \cdot g_2H = (g_1g_2)H$. Tämä laskutoimitus toteuttaa ryhmän aksioomat (Määritelmä 2.1 sivulla 3).

Määritelmä 2.9 (Tekijäryhmät)**.** Olkoon $H \trianglelefteq G$ ja $g \in G$. Sivuluokat gH muodostavat yhdessä ryhmän, jota kutsutaan *tekijäryhmäksi*. Laskutoimituksena on $g_1H \cdot g_2H = (g_1g_2)H$. Merkitään $G/H = \{gH \mid g \in G\}$.

Koska $gH = Hg$ kaikilla $g \in G$, voidaan käyttää merkintää $gH = [g]$ ja edelleen $[g_1][g_2] = [g_1g_2]$.

Määritelmä 2.10 (Konjugoiminen)**.** Olkoon G jokin ryhmä ja $g, f \in G$. Ryhmän alkiota $x = fgf^{-1}$ sanotaan alkion g *konjugaattialkioksi* ja toisaalta sanotaan, että x saadaan alkiosta g *konjugoimalla* f:llä.

Tämä yksinkertaiselta vaikuttava toimenpide voi siirtää permutaation vaikuttamaan jossain toisessa osassa ryhmää. Konjugoidaan esimerkkinä 3-sykli $g = (1\ 2\ 3)$ syklillä $f = (6\ 3\ 5\ 2\ 4\ 1)$ (käänteisalkio $f^{-1} = (1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 6)$):

$$x = fgf^{-1} = (6\ 3\ 5\ 2\ 4\ 1)(1\ 2\ 3)(1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 6) = (4\ 5\ 6). \tag{2.5}$$

Näin saadaan edelleen 3-sykli, mutta alkioiden 1, 2 ja 3 sijaan se vaikuttaa nyt alkioihin 4, 5 ja 6. Tästä on paljon hyötyä Megaminxin ratkaisemisessa, ja konjugoimiseen palataan luvussa 3.

Lause 2.11. *Jokainen parillinen permutaatio voidaan ilmoittaa 3-syklien tulona.*

Todistus. Tarkastellaan jotain mielivaltaista parillista permutaatiota f. Jos kyseessä on identtinen kuvaus, se voidaan ajatella 3-syklien tyhjänä tulona. Tarkastellaan sitten parillista permutaatiota f, joka ei ole identtinen kuvaus. Koska f on parillinen permutaatio, se voidaan kirjoittaa tulona

$$(g_1h_1)(g_2h_2)\dots(g_nh_n), \tag{2.6}$$

missä jokainen g_k ja h_k on vaihto. Nyt kaikille pareille g_kh_k pätee jokin vaihtoehdoista

1. g_kh_k on muotoa $(ab)(ab)$, jolloin $g_kh_k = \mathrm{id}$,

2. g_kh_k on muotoa $(ab)(bc)$, jolloin $g_kh_k = (abc)$ tai

3. $g_k h_k$ on muotoa $(ab)(cd)$, jolloin $g_k h_k = (abc)(bcd)$.

Siis f voidaan joka tapauksessa kirjoittaa 3-syklien tulona. (Häsä 2012, 24–25.) $\square$

Määritelmä 2.12 (Kommutaattorit)**.** Olkoon G jokin ryhmä ja $f, g \in G$. Ryhmän alkiota $x = fgf^{-1}g^{-1}$ sanotaan alkioiden f ja g *kommutaattoriksi.* Kommutaattoria merkitään $fgf^{-1}g^{-1} = [f, g]$.

Kommutaattorien käyttö antaa mielenkiintoisen tavan muodostaa 3-syklejä. Esimerkiksi jos siirrot f ja g liikuttavat vain yhtä yhteistä alkiota a, kommutaattori toimii näin: g^{-1} kuvaa alkion a alkioksi $g^{-1}(a)$, f^{-1} kuvaa alkion $g^{-1}(a)$ itsekseen, g kuvaa alkion $g^{-1}(a)$ takaisin alkioksi a, minkä jälkeen f kuvaa sen alkioksi $f(a)$. Alkiot $f(a)$ ja $g(a)$ kommutaattori kuvaa alkioiksi $g(a)$ ja a. Muille alkioille kommutaattori ei tee mitään. Kokonaisuudessaan on siis muodostettu 3-sykli $(a\ f(a)\ g(a))$.

Koska jokainen Megaminxin tila on parillinen ja voidaan lauseen 2.11 mukaan ilmoittaa 3-syklien avulla, voidaan yllä olevaa havaintoa käyttää hyväksi algoritmia muodostaessa. Myös kommutaattorien käyttöön palataan myöhemmin.

Näistä määritelmistä voidaan siirtyä Megaminxin ratkaisuun.

3 Megaminxin ratkaiseminen

Tässä luvussa esitetään siirtosarjat, joilla Megamix on mahdollista ratkaista. Lisäksi osoitetaan, että jokainen laillinen tila on ratkaistavissa näillä siirroilla. Ratkaisun ideaan on otettu mallia kurssin Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon materiaalista (Häsä 2012).

Sekoitetun tilan ilmoittaminen perussiirtojen avulla on usein monimutkaista, eikä onnistu suoraan annetusta permutaatiosta lähtien. Esimerkiksi siirrot A, B, C ja niiden yhdistelmä näyttävät syklimuodossaan seuraavalta:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10)(11\ 21\ 31\ 41\ 51)(15\ 25\ 35\ 45\ 55)\\
&\quad (16\ 26\ 36\ 46\ 56),\\
\mathrm{B} &= (11\ 12\ 13\ 14\ 15)(16\ 17\ 18\ 19\ 20)(1\ 54\ 92\ 103\ 21)(7\ 60\ 98\ 109\ 27)\\
&\quad (2\ 55\ 93\ 104\ 22),\\
\mathrm{C} &= (21\ 22\ 23\ 24\ 25)(26\ 27\ 28\ 29\ 30)(2\ 14\ 102\ 113\ 31)(8\ 20\ 108\ 119\ 37)\\
&\quad (3\ 15\ 103\ 114\ 32)\ \text{ja}\\
\mathrm{ABC} &= (1\ 55\ 11)(2\ 15\ 21)(3\ 4\ 5\ 54\ 92\ 114\ 32)(7\ 20\ 16\ 27)\\
&\quad (12\ 13\ 102\ 113\ 31\ 41\ 51)(14\ 103\ 22)(23\ 24\ 25\ 35\ 45\ 93\ 104)\\
&\quad (6\ 60\ 98\ 109\ 28\ 29\ 30\ 26\ 36\ 46\ 56\ 17\ 18\ 19\ 108\ 119\ 37\ 8\ 9\ 10).
\end{aligned}$$

Huomataan, että vaikka siirto ABC on itsessään yksinkertainen, sen sykliesitys on jo aika monimutkainen. Megaminxin sekoitettu tila voi olla paljon tätäkin monimutkaisempi, jolloin olisi työlästä esittää annettu permutaatio alkeissiirtojen avulla. Käyttämällä ryhmän rakennetta voidaan välivaiheiden kautta muodostaa Megaminxille algoritmi, jonka avulla se voidaan ratkaista aina riippumatta sen tilasta.

On olemassa siirtosarjoja, jotka eivät muuta palojen paikkoja, mutta saattavat kääntää niiden asentoja. Kaksi tällaista siirtoa yhdessä eivät edelleenkään muuta minkään palan paikkaa. Identtinen permutaatio on yksi tällainen siirto. Edelleen siirrot voidaan perua tekemällä niiden käänteissiirrot käänteisessä järjestyksessä, ja jos alkuperäinen siirto ei vaihtanut palojen paikkoja, ei vaihda käänteissiirtokaan. Näin ollen Megaminxin ryhmällä on aliryhmä, jonka permutaatiot eivät muuta palojen paikkoja mutta joissa palojen asennot voivat vaihtua. Tätä ryhmää kutsutaan Megaminxin *asentoryhmäksi* $\mathbb{M}_a$. Jos $g\mathbb{M}_a$ on eri sivuluokka kuin $h\mathbb{M}_a$, niin $g\mathbb{M}_a$ ja $h\mathbb{M}_a$ siirtävät paloja eri tavalla, ja sama pätee oikeille sivuluokille.

Lause 3.1. *Megaminxin asentoryhmä on Megaminxin ryhmän normaali aliryhmä eli* $\mathbb{M}_a \trianglelefteq \mathbb{M}$.

Todistus. Aliryhmä on normaali, jos sen vasemmat ja oikeat sivuluokat yhtyvät, tässä tapauksessa $g\mathbb{M}_a = \mathbb{M}_a g$ kaikilla $g \in \mathbb{M}$. Jos $g \in \mathbb{M}_a$ eli siirtosarja g ei muuta palojen paikkoja, niin sivuluokkana on $\mathbb{M}_a$ itse. Jos taas siirtosarja g

muuttaa palojen paikkoja, niin sivuluokat $g\mathbb{M}_a$ ja $\mathbb{M}_a g$ siirtävät samoja paloja samalla tavalla, koska aliryhmän $\mathbb{M}_a$ alkiot eivät siirrä niitä ollenkaan. □

Koska asentoryhmä on normaali, saadaan tekijäryhmä $\mathbb{M}_p = \mathbb{M}/\mathbb{M}_a$, jota kutsutaan *paikkaryhmäksi*. Tekijäryhmä koostuu sivuluokista, joiden alkiot muuttavat palojen paikkoja samalla tavalla. Tässä kohtaa siis unohdetaan yksittäiset ruudut ja tutkitaan ainoastaan palojen liikettä. Tällä jaolla on tärkeä seuraus Megaminxin ratkaisemisessa: Voidaan ensin siirtää palat omille paikoilleen välittämättä niiden asennoista. Tämä vastaa sitä, että paikkaryhmässä palataan neutraalialkioon eli sivuluokkaan $\mathbb{M}_a$. Tämän jälkeen palat käännetään oikeaan asentoon, jolloin koko ongelma on ratkaistu.

Paikkaryhmää tarkasteltaessa kiinnitetään huomio ruutujen permutaatioiden sijasta palojen permutaatioihin. Nyt kaikki Megaminxin palat keskipaloja lukuun ottamatta voidaan nimetä luvuin 1–50, jolloin erään nimeämistavan mukaan saadaan perussiirrolle A sykliesitys

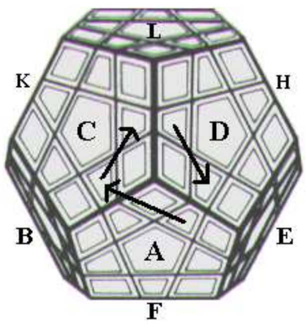
$$\mathrm{A} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9\ 10). \tag{3.1}$$

Kyseessä on kahden 5-syklin tulo, joka voidaan kirjoittaa kahdeksan vaihdon tulona. Koska kaikki perussiirrot ovat rakenteeltaan siirron A kaltaisia, huomataan, että kaikki siirrot ja siten jokainen Megaminxin laillinen tila ovat parillisia paikkaryhmää tarkasteltaessa. Voidaan tarkastella myös särmäpaloja ja kulmapaloja erikseen. Jokainen perussiirto on särmäpalojen ja kulmapalojen 5-sykli, joka voidaan esittää neljän vaihdon tulona. Siis jokainen Megaminxin laillinen tila on parillinen sekä särmäpaloille että kulmapaloille.

3.1 Särmäpalat oikeille paikoilleen

Laitetaan ensin paikoilleen särmäpalat. Niiden 3-sykli voidaan tehdä seuraavalla siirrolla:

$$\mathrm{DC^*D^*CDC^*D^*C} = (\mathrm{DC^*D^*C})^2. \tag{3.2}$$



Kuva 4: Särmäpalojen 3-sykli

Siirtosarja kiertää tahkojen A, C ja D yhteisiä särmäpaloja askeleen verran myötäpäivään. Sarja myös kääntää neljän eri kulmapalan asentoa (kulmapaloja ACD ja CDL myötäpäivään ja kulmapaloja ABC ja ADE vastapäivään), mutta tässä vaiheessa se ei ole oleellista, koska tarkastellaan vain palojen paikkoja. Lisäksi ratkaisu voidaan suorittaa siirtämällä ensin paikoilleen särmäpalat ja vasta sen jälkeen kiinnittää huomio kulmapaloihin. Jos kuitenkin haluaa kääntää kulmapalat takaisin, voi tehdä lisäksi siirtosarjan (3.3), joka kääntää kulmapalat takaisin (ACD ja CDL kääntyvät vastapäivään ja ABC ja ADE myötäpäivään).

$$\begin{aligned} &\mathrm{D^*(C^*ACA^*)^2D(AC^*A^*C)^2(A^*DAD^*)^2C^*} \\ &\mathrm{(DA^*D^*A)^2CD^*(A^*EAE^*)^2D(EA^*E^*A)^2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Jos esimerkiksi pala AC on paikalla CD, pala CD paikalla DL ja pala DL paikalla AC, halutaan tehdä syklin (AC CD AD) sijasta sykli (AC DL CD). Tällöin voidaan konjugoimalla tuoda halutut särmäpalat vastaaviin asemiin, käyttää 3-sykliä ja sen jälkeen kumota tuontiin tarvittava siirtosarja. Tällöin sarja muuttaa kokonaisuudessaan vain kolmen särmän paikkaa. Käytetään konjugoimiseen siirtoa D*:

$$\mathrm{D^*(DC^*D^*C)^2D}. \tag{3.4}$$

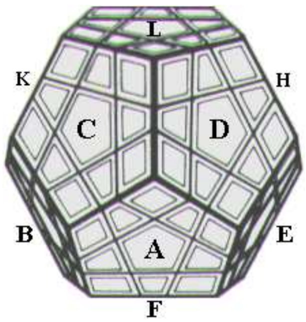
Tämän jälkeen kaikki kolme särmäpalaa ovat oikealla paikallaan.

Koska jokainen alkeissiirto on särmäpalojen parillinen permutaatio ja Megaminxin jokaisen laillisen tilan särmäpalojen permutaatio on parillinen, voidaan lauseen 2.11 mukaan jokainen tila esittää 3-syklien avulla. Tämä tarkoittaa sitä, että jos jokaiselle mahdolliselle kolmen särmäpalan kombinaatiolle löydetään permutaatio, jolla konjugoida siirtosarja (3.2) niin, että saadaan kyseiset kolme palaa oikeille paikoilleen, saadaan lopulta kaikki särmäpalat paikoilleen.

Särmäpaloja on 30 kappaletta, joten kolmen palan kombinaatioita on yhteensä $\binom{30}{3} = 4060$. Kombinaatiot voidaan jakaa joukkoihin a–k. Kuvissa on esimerkkitapauksia kombinaatiojoukoista. Niiden kuvailemisen helpottamiseksi käydään läpi muutamia käsitteitä.

Tarkastellaan esimerkkinä sivua A. Kutsutaan esimerkiksi vierekkäisistä särmäpaloista AB, AC ja AD *ensimmäiseksi* palaa AB, *toiseksi* eli *keskimmäiseksi* palaa AC ja *kolmanneksi* eli *viimeiseksi* palaa AD. Tällöin tarkastellaan paloja sivun A suhteen myötäpäivään lähtien liikkeelle peräkkäisistä paloista ensimmäisestä. Kulman *vastainen* tai *vastakkainen* särmä on se, joka on mahdollisimman kaukana sekä myötä- että vastapäivään. Kulman ABC *viereiset särmät* ovat AB ja AC, joista *ennen kulmaa* tulee AB ja *kulman jälkeen* AC. Kulman ABC vastainen särmä on AE. Kahden särmän *jälkeinen* kulma tai särmä on se pala, joka tulee särmistä toisen jälkeen. Esimerkiksi särmien AB ja AC jälkeen tulevat kulmapala ACD ja särmäpala AD.

Sivun A *monitahokkaan puoliskon* muodostavat sivu itse ja viisi sen viereistä sivua eli sivut B, C, D, E ja F. Särmäpalojen AB ja AC yhteinen sivu on sivu A,



Kuva 5: Megaminx

palan AB toinen sivu on B ja palan AC toinen sivu on C. Jos kaksi sivua, jotka eivät ole toistensa vieressä, sijaitsevat niin, että niillä on tasan kaksi yhteistä viereistä sivua, on niiden *välinen särmä* se ainoa särmäpala, jonka vieressä on kummankin sivun kulmapala. Tästä seuraa se, että kumpikaan sivuista ei sijaitse toisen monitahokkaan puoliskolla. Esimerkiksi sivujen A ja L välinen särmä on CD, ja niiden yhteiset viereiset sivut ovat C ja D.

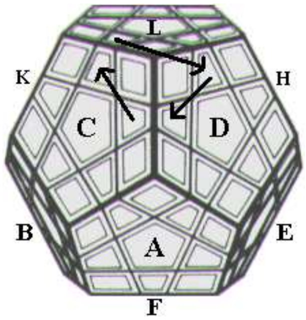
Kombinaatioiden lisäksi halutaan tietää, voidaanko kaikki mainitut kolmen palan yhdistelmät ratkaista käyttämällä särmäpalojen 3-sykliä eli siirtosarjaa (3.2). Tähän riittää se, että keksitään siirtosarja, jolla palat saadaan 3-sykliä vastaavaan asemaan eli särmäpalat paikoille AC, AD ja CD. Joskus voi olla helpompaa tuoda ne vastaaville paikoille niin, että edellä mainitun 3-syklin sijasta tehdään sen käänteissiirto, jolloin palat kääntyvätkin vastapäivään. Tässä vaiheessa kuitenkin joko siirtosarja (3.2) tai sen käänteissiirto kääntää palat oikeille paikoille, minkä jälkeen perutaan tuontiin käytetyt siirrot. Tunnettu 3-sykli siis konjugoidaan monitahokkaan muihin osiin. Huomataan, että kun konjugoiva siirtosarja on f, on tuontiin tarvittava siirtosarja f^{-1}. Konjugoitava siirtosarja g on aina (3.2) tai sen käänteissiirto. Käänteissiirto voidaan suorittaa tekemällä siirtosarjan siirtojen käänteissiirrot käänteisessä järjestyksessä tai tekemällä koko siirtosarja kahdesti.

Käytännössä riittää, että kaikki kolme palaa saadaan yhden kulman ympärille. Tämän jälkeen voidaan kääntää koko monitahokasta sopivasti ja nimetä sivut uudelleen niin, että voidaan käyttää siirtosarjaa (3.2). Sen jälkeen palautetaan sivujen nimet ennalleen ja perutaan tuontiin käytetyt siirrot. Siirtosarja (3.2) kääntää aina myös neljän kulman asentoa, mutta kulmien paikkoihin ja asentoihin palataan myöhemmin.

Esimerkiksi jos halutaan kääntää palat CD, CL ja DL myötäpäivään, konjugoiva siirto f^{-1} on D*C. Särmäpalojen 3-sykli tehdään kahdesti ja siirto f on C*D. Kokonaisuudessaan siirtosarja on siis

$$\mathrm{D^*C(DC^*D^*C)^4C^*D.} \tag{3.5}$$

Vaihtoehtoisesti voidaan kääntää koko monitahokasta ja nimetä sivu D sivuksi

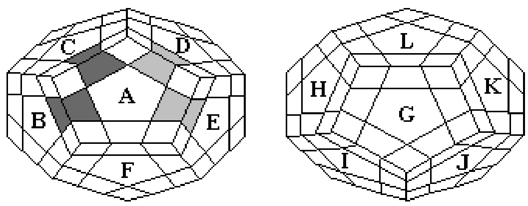


Kuva 6: Särmäpalojen 3-sykli (CD CL DL)

A, sivu C voisi edelleen olla C, sivu L nimettäisiin sivuksi D ja niin edelleen. Tällöin särmäpalojen 3-sykli kääntää palat suoraan oikeille paikoilleen. Sen jälkeen voidaan vaihtaa sivujen nimet ennalleen. Tämä tapa helpottaa Megaminxin ratkaisua monessa tilanteessa, kun kaikkia paloja ei tarvitse kuljettaa monitahokkaan toiselle puolelle.

Seuraavaksi käydään läpi kaikki kolmen särmäpalan kombinaatiojoukot esimerkkeineen. Tarkemmat kuvaukset ja eri kombinaatioiden ratkaisuun tarvittavat konjugaatit ovat liitteenä (Liite A). Jokaisen kuvion ensimmäinen pala voi olla viidessä eri paikassa kullakin 12 sivulla. Joissakin tapauksissa palat sijaitsevat toistensa suhteen symmetrisesti ja osa kombinaatioista saatetaan tällä tavalla laskea kahteen, kolmeen tai jopa kuuteen kertaan, mutta tämä otetaan tarkastelussa huomioon.

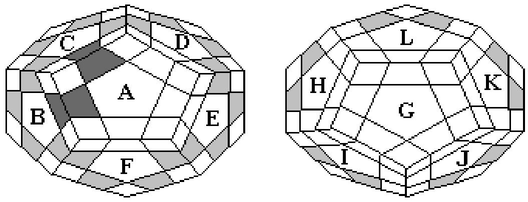
a. Kaikki kolme palaa samalla sivulla. Kaikki kolme särmäpalaa sijaitsevat samalla Megaminxin sivulla. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 7, jossa joukon kombinaatioille yhteiset särmät on merkitty tummemmalla harmaalla ja kolmannen särmän eri vaihtoehdot vaaleammalla harmaalla. Joukossa a on yhteensä 120 kombinaatiota.



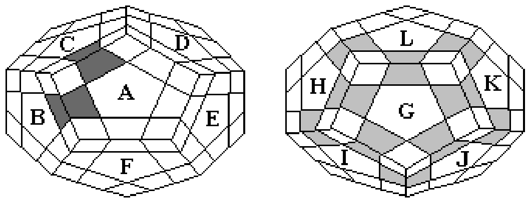
Kuva 7: Särmäpalojen kombinaatiojoukko a

b. Kaksi palaa vierekkäin samalla sivulla ja kolmas tämän sivun puoleisella monitahokkaan puoliskolla. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 8. Joukossa b on yhteensä 800 kombinaatiota.

c. Kaksi palaa vierekkäin samalla sivulla ja kolmas tämän sivun vastakkaisen sivun monitahokkaan puoliskolla. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 9. Joukossa c on yhteensä 600 kombinaatiota.

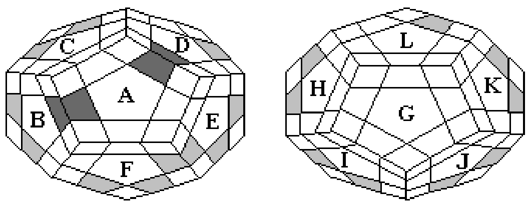


Kuva 8: Särmäpalojen kombinaatiojoukko b



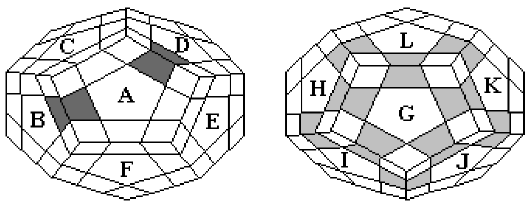
Kuva 9: Särmäpalojen kombinaatiojoukko c

d. Kaksi palaa on samalla sivulla ja kolmas tämän sivun monitahokkaan puoliskolla. Mitkään kaksi palaa eivät ole vierekkäin. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 10. Joukossa d on yhteensä 540 kombinaatiota.



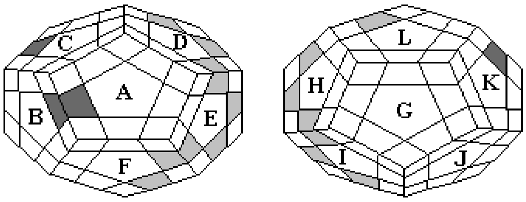
Kuva 10: Särmäpalojen kombinaatiojoukko d

e. Kaksi palaa on samalla sivulla ja kolmas tämän sivun vastakkaisen sivun monitahokkaan puoliskolla. Mitkään kaksi palaa eivät ole vierekkäin. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 11. Joukossa e on yhteensä 600 kombinaatiota.



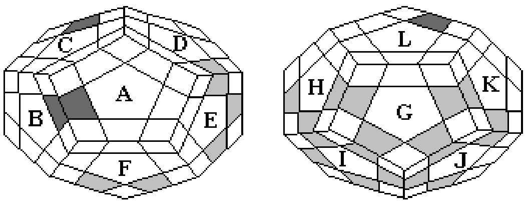
Kuva 11: Särmäpalojen kombinaatiojoukko e

f. Kaksi palaa on vierekkäisillä sivuilla siten, että toinen on ensimmäisen palan jälkeisen särmäpalan toisella sivulla toinen myötäpäivään. Mitkään kaksi palaa eivät ole samalla sivulla. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 12. Joukossa f on yhteensä 420 kombinaatiota.



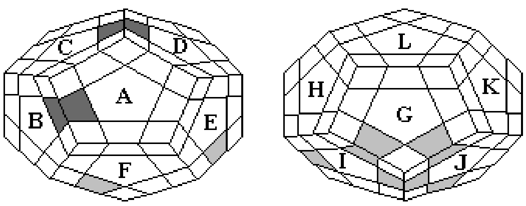
Kuva 12: Särmäpalojen kombinaatiojoukko f

g. Kaksi palaa on vierekkäisillä sivuilla siten, että toinen on ensimmäisen palan jälkeisen särmäpalan toisella sivulla toinen vastapäivään. Mitkään kaksi palaa eivät ole samalla sivulla. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 13. Joukossa g on yhteensä 580 kombinaatiota.



Kuva 13: Särmäpalojen kombinaatiojoukko g

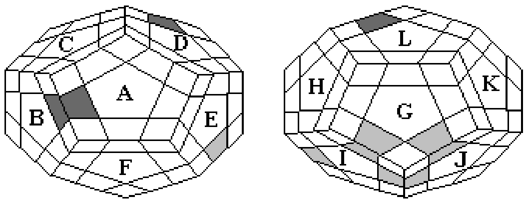
h. Kaksi palaa on vierekkäisillä sivuilla siten, että toinen on ensimmäisen palan jälkeisen särmäpalan toisella sivulla ensimmäinen vastapäivään. Mitkään kaksi palaa eivät ole samalla sivulla. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 14. Joukossa h on yhteensä 240 kombinaatiota.



Kuva 14: Särmäpalojen kombinaatiojoukko h

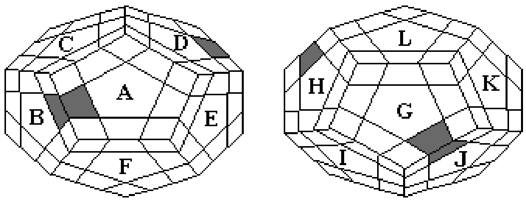
i. Kaksi palaa on vierekkäisillä sivuilla siten, että toinen on ensimmäisen palan jälkeen myötäpäivään toisen särmäpalan toisella sivulla

toinen myötäpäivään. Mitkään kaksi palaa eivät ole samalla sivulla. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 15. Joukossa i on yhteensä 140 kombinaatiota.



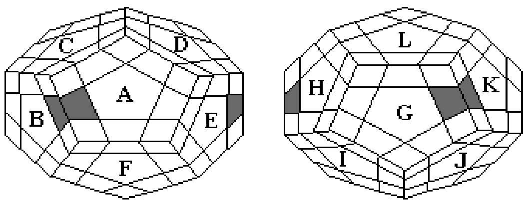
Kuva 15: Särmäpalojen kombinaatiojoukko i

j. Kaksi palaa on vierekkäisillä sivuilla siten, että toinen on ensimmäisen palan jälkeen myötäpäivään toisen särmäpalan toisella sivulla toinen vastapäivään. Mitkään kaksi palaa eivät ole samalla sivulla. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 16. Joukossa j on yhteensä 10 kombinaatiota.



Kuva 16: Särmäpalojen kombinaatiojoukko j

k. Kaksi palaa on vierekkäisillä sivuilla siten, että toinen on ensimmäisen palan jälkeen vastapäivään toisen särmäpalan toisella sivulla toinen myötäpäivään. Mitkään kaksi palaa eivät ole samalla sivulla. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 17. Joukossa k on yhteensä 10 kombinaatiota.



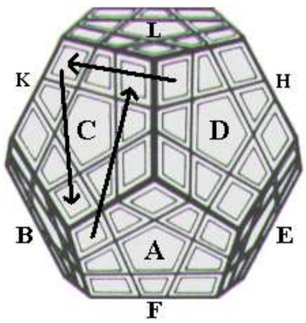
Kuva 17: Särmäpalojen kombinaatiojoukko k

Edellä laskettuja kombinaatioita on yhteensä 4060, mikä on kaikkien särmäpalojen kombinaatioiden määrä. Kaikki mahdolliset särmäpalojen kombinaatiot on siis käyty läpi.

3.2 Kulmapalat oikeille paikoilleen

Kulmapalojen 3-sykli voidaan tehdä seuraavilla siirroilla:

$$\text{D*ADL*D*A*DL.} \tag{3.6}$$



Kuva 18: Kulmapalojen 3-sykli

Siirtosarja kiertää tahkon C alaspäin olevan kärjen ja kahden ylhäällä olevan kulman paikkoja askeleen vastapäivään. Konjugoimalla voidaan tuoda halutut kulmapalat vastaaviin asemiin, käyttää 3-sykliä ja sen jälkeen kumota tuontiin tarvittava siirtosarja. Tällöin sarja muuttaa kokonaisuudessaan vain kolmen kulman paikkaa.

Esimerkkinä konjugoinnista: syklin (ABC CDL CKL) sijasta halutaan tehdä sykli (ABC CDL DHL). Kun konjugoimiseen käytetään siirtoa L, huomataan, että itse kulmien 3-sykli on tehtävä kahdesti (tai vaihtoehtoisesti sen käänteissiirto kerran), jotta kulmat palautuvat paikoilleen:

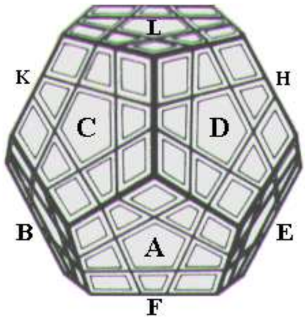
$$\text{L(D*ADL*D*A*DL)}^2\text{L*.} \tag{3.7}$$

Tämän jälkeen kaikki kolme kulmapalaa ovat oikeilla paikoillaan.

Megaminxin jokaisen laillisen tilan permutaatio on parillinen myös kulmapalojen suhteen. Jos siis voidaan todistaa, että jokaiselle mahdolliselle kolmen kulmapalan kombinaatiolle löydetään permutaatio, jolla konjugoida siirtosarjan (3.6) avulla palat oikeille paikoilleen, saadaan kaikki kulmapalat paikoilleen.

Kulmapaloja on 20 kappaletta, joten kolmen palan kombinaatioita on yhteensä $\binom{20}{3} = 1140$. Kombinaatiot voidaan jakaa joukkoihin a–g. Kuvissa on esimerkkitapauksia kombinaatiojoukoista. Niiden kuvailemisen helpottamiseksi käytetään samantyyppisiä käsitteitä kuin särmäpalojen kanssa, mutta nyt päähuomio on kulmapaloissa.

Tarkastellaan esimerkkinä sivua A. Kutsutaan esimerkiksi vierekkäisistä kulmapaloista ABF, ABC ja ACD *ensimmäiseksi* palaa ABF, *toiseksi* eli *keskimmäiseksi* palaa ABC ja *kolmanneksi* eli *viimeiseksi* palaa ACD. Tällöin tarkastellaan paloja sivun A suhteen myötäpäivään lähtien liikkeelle peräkkäisistä paloista ensimmäisestä. Särmän *vastainen* tai *vastakkainen* kulma on se, joka on mahdollisimman kaukana sekä myötä- että vastapäivään. Särmän AB *viereiset kulmat* ovat ABF ja ABC, joista *ennen särmää* tulee ABF ja *särmän jälkeen* ABC. Särmän AB vastainen kulma on ADE. Kahden kulman *jälkeinen* kulma tai särmä on se pala, joka tulee särmistä toisen jälkeen. Esimerkiksi kulmien ABF ja ABC jälkeen tulevat särmäpala AC ja kulmapala ACD.



Kuva 19: Megaminx

Sivun A *monitahokkaan puoliskon* muodostavat sivu itse ja viisi sen viereistä sivua eli sivut B, C, D, E ja F. Kulmapalojen ABF ja ABC yhteiset sivut ovat sivu A ja sivu B, ja kulmapalojen ABF ja ACD yhteinen sivu on sivu A. Palan ABF toinen sivu on F ja kolmas B, ja palan ABC toinen sivu on B ja kolmas C. Tässäkin edetään järjestyksessä myötäpäivään.

Nyt halutaan kombinaatioiden lisäksi tietää, voidaanko kaikki mainitut kolmen palan yhdistelmät ratkaista käyttämällä kulmapalojen 3-sykliä eli siirtosarjaa (3.6) tai sen käänteissiirtoa. Tähän riittää se, että keksitään siirtosarja, jolla palat saadaan 3-sykliä vastaavaan asemaan eli paikoille ABC, CDL ja CKL. Kuten aiemmin, huomataan, että kun konjugoiva siirtosarja on f, on tuontiin tarvittava siirtosarja f^{-1}. Konjugoitava siirtosarja g on aina (3.6) tai sen käänteissiirto.

Kuten särmien kanssa, myös kulmapaloille riittää, että ne saadaan vastaaviin asemiin jossain kohtaa monitahokasta. Tämän jälkeen voidaan sivut nimetä uudelleen, suorittaa tarvittavat siirtosarjat ja lopuksi palauttaa sivujen nimet ennalleen.

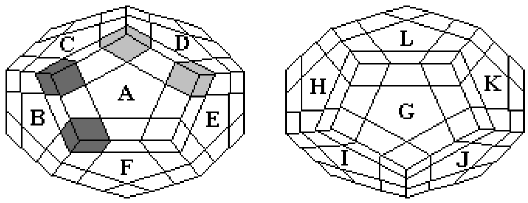
Esimerkiksi, jos halutaan kääntää palat ADE, CDL ja DHL myötäpäivään, siirto f^{-1} on LA^{*2}. Kulmapalojen 3-sykli tehdään sen jälkeen kahdesti ja lopuksi tehdään siirto $f = \mathrm{A}^2\mathrm{L}^*$. Kokonaisuudessaan siirtosarja on siis

$$\mathrm{LA}^{*2}(\mathrm{D}^*\mathrm{ADL}^*\mathrm{D}^*\mathrm{A}^*\mathrm{DL})^2\mathrm{A}^2\mathrm{L}^*. \tag{3.8}$$

Sama tulos saadaan nimeämällä sivu D sivuksi C ja pitämällä sivu L samana. Tällöin tehtäisiin siirtosarja (3.6) kahdesti ja palautettaisiin sivujen nimet ennalleen.

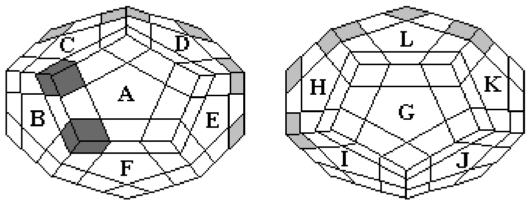
Seuraavaksi käydään läpi kaikki kolmen kulmapalan kombinaatiojoukot esimerkkeineen. Tarkemmat kuvaukset ja eri kombinaatioiden ratkaisuun tarvittavat konjugaatit ovat liitteenä (Liite B). Jokaisen kuvion ensimmäinen pala voi olla viidessä eri paikassa kullakin 12 sivulla. Joissakin tapauksissa palat sijaitsevat toistensa suhteen symmetrisesti ja osa kombinaatioista saatetaan tällä tavalla laskea kolmeen kertaan, mutta tämä otetaan tarkastelussa huomioon.

a. Kaikki kolme palaa samalla sivulla. Kaikki kolme kulmapalaa sijaitsevat samalla Megaminxin sivulla. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 20. Joukossa a on yhteensä 120 kombinaatiota.



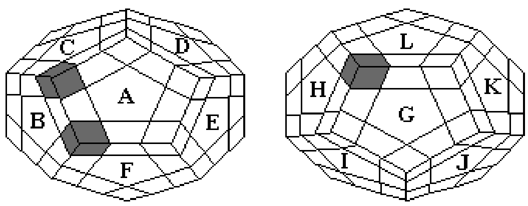
Kuva 20: Kulmapalojen kombinaatiojoukko a

b. Kaksi palaa vierekkäin samalla sivulla ja kolmas tämän sivun puoleisella monitahokkaan puoliskolla. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 21. Joukossa b on yhteensä 300 kombinaatiota.



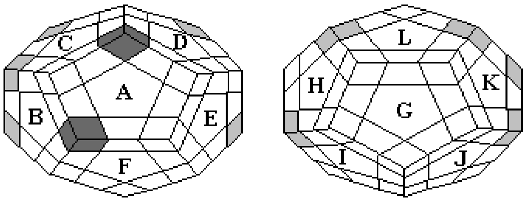
Kuva 21: Kulmapalojen kombinaatiojoukko b

c. Kaksi palaa vierekkäin samalla sivulla ja kolmas tämän sivun vastakkaisen sivun monitahokkaan puoliskolla. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 22. Joukossa c on yhteensä 60 kombinaatiota.



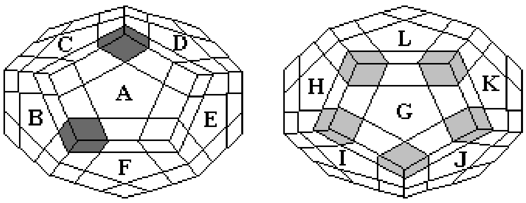
Kuva 22: Kulmapalojen kombinaatiojoukko c

d. Kaksi palaa on samalla sivulla ja kolmas tämän sivun monitahokkaan puoliskolla. Mitkään kaksi palaa eivät ole vierekkäin. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 23. Joukossa d on yhteensä 260 kombinaatiota.



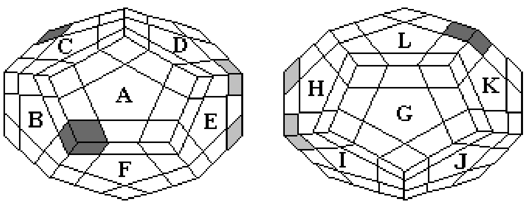
Kuva 23: Kulmapalojen kombinaatiojoukko d

e. Kaksi palaa samalla sivulla ja kolmas tämän sivun vastakkaisen sivun monitahokkaan puoliskolla. Mitkään kaksi palaa eivät ole vierekkäin. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 24. Joukossa e on yhteensä 300 kombinaatiota.



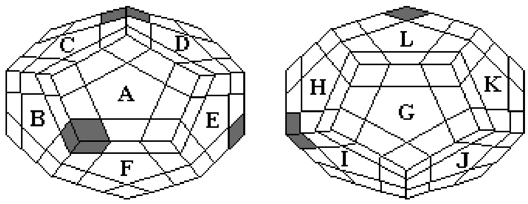
Kuva 24: Kulmapalojen kombinaatiojoukko e

f. Kaksi palaa vierekkäisillä sivuilla siten, että toinen on ensimmäisen palan jälkeisen kulmapalan kolmannella sivulla toinen myötäpäivään. Mitkään kaksi palaa eivät ole samalla sivulla. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 25. Joukossa f on yhteensä 80 kombinaatiota.



Kuva 25: Kulmapalojen kombinaatiojoukko f

g. Kaksi palaa vierekkäisillä sivuilla siten, että toinen on ensimmäisen palan jälkeisen kulmapalan kolmannella sivulla toinen vastapäivään. Mitkään kaksi palaa eivät ole samalla sivulla. Joukon eri vaihtoehtojen esimerkit näkyvät kuvassa 26. Joukossa g on yhteensä 20 kombinaatiota.



Kuva 26: Kulmapalojen kombinaatiojoukko g

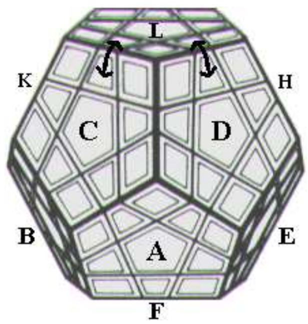
Edellä laskettuja kombinaatioita on yhteensä 1140, mikä on kaikkien kulmapalojen kombinaatioiden määrä. Kaikki mahdolliset kulmapalojen kombinaatiot on siis käyty läpi.

3.3 Särmäpalat oikeisiin asentoihin

Kaksi vierekkäistä särmäpalaa CL ja DL voidaan kääntää oikeisiin asentoihin tällä sarjalla:

$$\text{D*D*AAFEA*DDL*D*D*AE*F*A*A*DDL.} \tag{3.9}$$

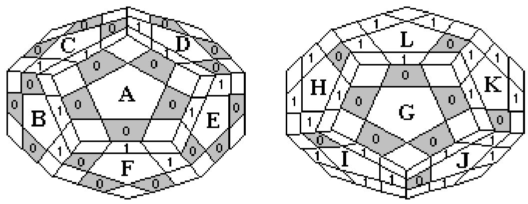
Samalla on tapahtunut kulmapalojen 3-sykli, jossa palat CKL, CDL ja DHL ovat kiertyneet L:n suhteen vastapäivään. Jos kulmapalojen halutaan pysyvän paikoillaan, tehdään tämä siirtosarja kolme kertaa.



Kuva 27: Särmäpalojen kääntäminen

Käännettävät särmät siirretään vierekkäin ja siirtosarjaa (3.9) käytetään kääntämään ne oikein päin, minkä jälkeen särmät voidaan palauttaa alkuperäisille paikoille. Näin oikeassa asennossa olevien särmien määrä koko ajan kasvaa. Tätä toistetaan niin monta kertaa, että kaikki särmäpalat ovat oikeassa asennossa. Ongelmana on, että voimme päätyä tilanteeseen, jossa vain yksi pala on väärässä asennossa. Todistaaksemme, että näin ei voi käydä, määrittelemme kokonaiskiertymän käsitteen ja tutkimme, miten se muuttuu perussiirtojen aikana (Häsä 2012, 62–64).

On helppoa sanoa, onko pala oikeassa vai väärässä asennossa, jos se on oikealla paikallaan. Hankalammaksi tilanne muuttuu, jos pala on väärällä paikalla, koska tällöin sillä ei ole oikeaa asentoa. Nimetään perustilassa olevan monitahokkaan jokaisen särmäpalan toinen ruutu luvulla 0 ja toinen luvulla 1 (kuva 28). Sitten tarkastellaan ainoastaan paikkoja, joissa oli perusasemassa luku 0. Jokaisesta palasta on yksi ruutu aina tällaisella paikalla. Lasketaan tarkasteltavien ruutujen lukujen summa ja jaetaan se kahdella.



Kuva 28: Särmäpalojen numerointi

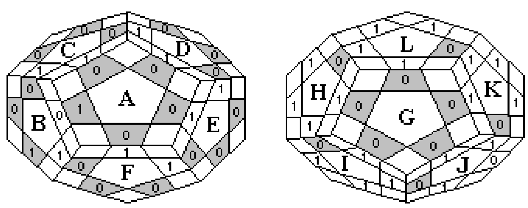
Määritelmä 3.2 (Kokonaiskiertymä särmäpaloille)**.** Tarkasteltavien ruutujen lukujen summa jaetaan kahdella. Jakolaskun jakojäännöstä, joka saa arvon 0 tai 1, kutsumme *särmäpalojen kokonaiskiertymäksi.*

Nyt tutkimme, kuinka perussiirrot muuttavat kokonaiskiertymää. Jaamme siirrot ja niiden seurauksina olevat tilat tapauksiin a–d.

a. Perustilassa eli identtisen siirron jälkeen kokonaiskiertymä on 0, koska lähtötilanne ei muutu ja jokaisella tarkasteltavalla paikalla on alkuperäisen määritelmän mukaan luku 0, jolloin sekä summa että jakojäännös on 0.

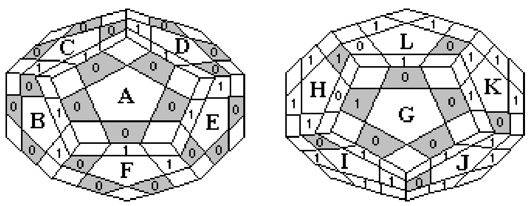
b. Kun tehdään siirto A tai G, kaikki tarkasteltavat paikat, joihin siirto vaikuttaa, ovat samalla sivulla, jota kierretään, eli sivulla A tai G. Niihin tulee edelleen luku 0. Kuten kohdassa a, kokonaiskiertymä on 0.

c. Siirrot B (kuva 29), C, D, E ja F vaikuttavat viiteen tarkasteltavaan ruutuun, joista kolme on kierrettävällä sivulla, yksi sivulla A ja viides kierrettävän sivun ja sivun A viereisellä sivulla. Kahteen kierrettävän sivun tarkasteluruuduista tulee luku 0 ja kolmanteen tulee luku 1. Yhteen sivun A merkattuun paikkaan tulee luku 1 ja viidenteen tarkasteluruutuun luku 0. Tällöin summa on $0 + 0 + 1 + 1 + 0 = 2$ ja jakojäännös 0. Kokonaiskiertymä on siis 0.



Kuva 29: Siirron B vaikutus kokonaiskiertymään

d. Myös siirrot H (kuva 30), L, K, J ja I vaikuttavat viiteen tarkasteltavaan ruutuun. Niistä yksi on kierrettävällä sivulla, yksi sivulla G, kaksi A:n puoleisella monitahokkaan puoliskolla ja viides kierrettävän sivun ja sivun G viereisellä sivulla. Kierrettävän sivun tarkasteluruutuun ja yhteen sivun G merkattuun paikkaan tulee luku 1. Molempiin A:n puoleisen monitahokkaan puoliskon tarkasteluruutuihin tulee luku 0 ja viidennen tarkasteluruudun lukuna pysyy 0. Siis summa on $1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 2$ ja jakojäännös 0. Kokonaiskiertymä on tällöin 0.



Kuva 30: Siirron H vaikutus kokonaiskiertymään

Nyt huomataan, että perussiirrot eivät muuta kokonaiskiertymää. Tällöin mikään perussiirtojen yhdistelmäkään ei muuta kokonaiskiertymää, vaan se on kaikissa Megaminxin tiloissa vakio. Siten ei voida päätyä tilanteeseen, jossa vain yksi särmäpala olisi väärässä asennossa, muuten kokonaiskiertymä poikkeaisi monitahokkaan alkuperäisestä tilasta. Näin ollen edellä mainitut siirtosarjat riittävät ja kaikki särmäpalat saadaan oikein päin.

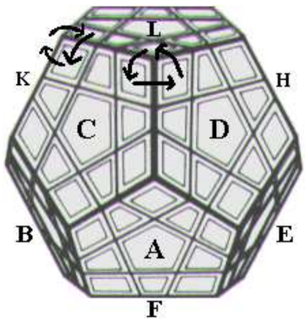
3.4 Kulmapalat oikeisiin asentoihin

Jos kulmaa käännetään kahdesti myötäpäivään, se on samassa asennossa kuin jos sitä olisi käännetty kerran vastapäivään. Sama pätee myös toiseen suuntaan. Siksi voidaan sopia, että jos kulma on väärässä asennossa, se on aina kiertynyt joko askeleen myötäpäivään tai askeleen vastapäivään. Kahta vierekkäistä kulmaa voidaan kiertää siirtosarjalla

$$\begin{aligned} &\mathrm{C^*DCD^*C^*DCD^*L^*DC^*D^*CDC^*D^*CL} \\ &= \mathrm{(C^*DCD^*)^2L^*(DC^*D^*C)^2L}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Tämän jälkeen kulmapala CDL on kiertynyt askeleen vastapäivään ja kulmapala CKL askeleen myötäpäivään.

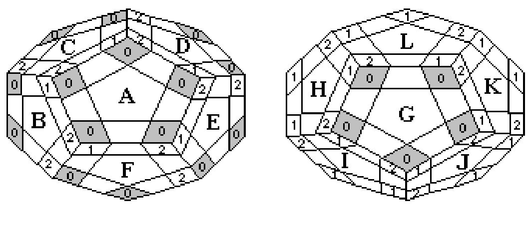
Käännettävät kulmapalat siirretään vierekkäin ja siirtosarjaa (3.10) käytetään kääntämään ne oikein päin, minkä jälkeen kulmat voidaan palauttaa oikeille paikoilleen. Joskus palat tulevat paikoille niin, että kulmapala CDL pitäisi kiertää myötäpäivään ja CKL vastapäivään. Tällöin siirtosarja (3.10) tehdään kahdesti tai käännetään koko monitahokasta ja nimetään sivu C sivuksi L ja sivu L sivuksi C, minkä jälkeen tehdään siirtosarja (3.10). Jokaisella kerralla vähintään yksi kulma saadaan oikeaan asentoon ja näin oikeassa asennossa olevien



Kuva 31: Kulmapalojen kääntäminen

kulmapalojen määrä kasvaa koko ajan. Tämä toistetaan niin monta kertaa, että ne ovat kaikki oikeassa asennossa. Siirtosarjassa (3.10) toinen kulmapala kääntyy myötäpäivään ja toinen vastapäivään. Kuten särmäpalojen tapauksessa, on vaikeaa määritellä palan oikeaa asentoa, jos se ei ole oikealla paikallaan, ja ongelmana on, että voimme päätyä tilanteeseen, jossa vain yksi pala on väärässä asennossa. Määrittelemme myös kulmapaloille kokonaiskiertymän käsitteen ja tutkimme, miten se muuttuu perussiirtojen aikana.

Numeroidaan perustilassa olevan monitahokkaan jokaisen kulmapalan ruudut luvuilla 0, 1 ja 2. Jokaisessa palassa on luku 0 ja sen jälkeen myötäpäivään kierrettäessä järjestyksessä luvut 1 ja 2. Numerointi näkyy kuvassa 32. Tämän jälkeen tarkastellaan vain ja ainoastaan paikkoja, joissa oli perusasemassa luku 0. Jokaisesta palasta on yksi ruutu aina tällaisella paikalla. Lasketaan tarkasteltavien ruutujen lukujen summa ja jaetaan se kolmella.



Kuva 32: Kulmapalojen numerointi

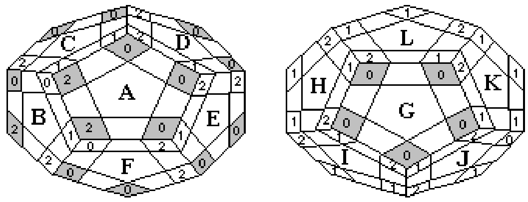
Määritelmä 3.3 (Kokonaiskiertymä kulmapaloille)**.** Tarkasteltavien ruutujen lukujen summa jaetaan kolmella. Jakolaskun jakojäännöstä, joka saa arvon 0, 1 tai 2, kutsumme *kulmapalojen kokonaiskiertymäksi.*

Nyt tutkimme, kuinka perussiirrot muuttavat kokonaiskiertymää. Jaamme siirrot ja niiden seurauksina olevat tilat tapauksiin a–d.

a. Perustilassa eli identtisen siirron jälkeen kokonaiskiertymä on 0, koska lähtötilanne ei muutu ja jokaisella tarkasteltavalla paikalla on alkuperäisen määritelmän mukaan luku 0, jolloin sekä summa että jakojäännös on 0.

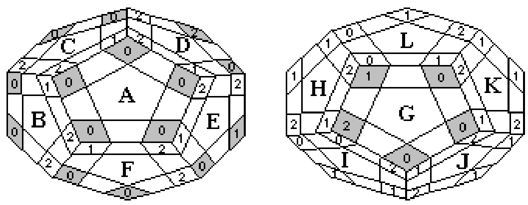
b. Kun tehdään siirto A tai G, kaikki tarkasteltavat paikat, joihin siirto vaikuttaa, ovat samalla sivulla, jota kierretään, eli sivulla A tai G. Niihin tulee edelleen luku 0. Kuten kohdassa a, kokonaiskiertymä on 0.

c. Siirrot B (kuva 33), C, D, E ja F vaikuttavat viiteen tarkasteltavaan ruutuun, joista kaksi on kierrettävällä sivulla, kaksi sivulla A ja viides kierrettävän sivun ja sivun A viereisellä sivulla. Yhteen kierrettävän sivun tarkasteluruuduista tulee luku 0 ja toiseen tulee luku 2. Molempiin sivun A merkattuihin paikkoihin tulee luku 2 ja viidenteen tarkasteluruutuun luku 0. Summa on siis $0 + 2 + 2 + 2 + 0 = 6$ ja jakojäännös 0. Kokonaiskiertymä on tällöin 0.



Kuva 33: Siirron B vaikutus kokonaiskiertymään

d. Myös siirrot H (kuva 34), L, K, I ja J vaikuttavat viiteen tarkasteltavaan ruutuun, joista kaksi on sivulla G ja kolme A:n puoleisella monitahokkaan puoliskolla kahdella eri sivulla. Sivun G merkattuihin paikkoihin tulee luvut 1 ja 2. Sivun A puoleisen monitahokkaan puoliskon tarkasteluruutuihin tulee toiselle sivulle luku 1 ja toiselle luvut 0 ja 2. Summa on siis $1 + 2 + 1 + 0 + 2 = 6$ ja jakojäännös on 0. Kokonaiskiertymä on tällöin 0.



Kuva 34: Siirron H vaikutus kokonaiskiertymään

Perussiirrot eivät siis muuta kokonaiskiertymää. Tällöin mikään perussiirtojen yhdistelmäkään ei muuta sitä, vaan kokonaiskiertymä on kaikissa Megaminxin tiloissa vakio. Siksi ei voida päätyä tilanteeseen, jossa vain yksi kulmapala olisi väärässä asennossa, muuten kokonaiskiertymä poikkeaisi alkuperäisestä. Samasta syystä ei voi olla vain kahta palaa väärässä asennossa siten, että ne olisivat kiertyneet samaan suuntaan, esimerkiksi myötäpäivään. Kulmat voidaan aina siirtää vierekkäin, ja ainakin toinen kulmista voidaan siirtosarjalla (3.10) kääntää oikeaan asentoon. Tällöin jäisi vain yksi pala väärään asentoon, jolloin kokonaiskiertymä poikkeaisi alkuperäisestä. Näin ollen edellä mainitut siirtosarjat riittävät ja kaikki kulmapalat saadaan oikein päin.

Megaminx on ratkaistu.

4 Lisää siirtosarjoista

Tässä luvussa esitetään uusia siirtosarjoja ja tutkitaan aiempia hieman lähemmin. Tutkitaan, miten siirtosarjat ovat syntyneet ja minkälaisista osista ne rakentuvat. Nähdään, että Megaminx voidaan ratkaista monella eri tavalla.

4.1 Mèffert's Megaminx Solution -alkeisoperaatiot

Megaminxin ratkaisumalli, jonka on tehnyt Kurt Endl ja joka löytyy Internet-sivulta Mèffert's Megaminx Solution, ratkaisee monitahokkaan etenemällä niin sanotusti "ylhäältä alas". Malliin kuuluu yhdeksän eri vaihetta, joista ensimmäisessä ratkaistaan ylin sivu, esimerkiksi sivu L, toisessa vaiheessa kaikki sen sivun viereiset särmät ja niin edelleen kunnes viimeisessä vaiheessa käännetään viimeisetkin kulmat oikeaan asentoon. Malli pohjautuu neljään alkeisoperaatioon, joissa kaikissa on neljä siirtoa. Tässä tutkielmassa esitetyn algoritmin siirtosarjoista kaksi sisältää näitä alkeisoperaatioita, jotka ovat nimettyinä ja tässä työssä käytetyillä merkinnöillä seuraavat:

$$\mathrm{V}_y = \mathrm{C^*DCD^*} \tag{4.1}$$
$$\mathrm{O}_y = \mathrm{DC^*D^*C} \tag{4.2}$$
$$\mathrm{V}_a = \mathrm{CD^*C^*D} \tag{4.3}$$
$$\mathrm{O}_a = \mathrm{D^*CDC^*}. \tag{4.4}$$

Kaikki siirtosarjat ovat kommutaattoreita, joissa vuorottelevat perussiirrot C, D ja niiden käänteissiirrot. Siirtosarjan nimessä V tarkoittaa vasenta (eli sivua C) ja O oikeaa (eli sivua D) ja alaindeksi kertoo, siirretäänkö ensimmäinen siirto ylös vai alas, kun katsotaan sivujen C ja D yhteistä särmää. Kaksi ensimmäistä siirtosarjaa ovat muotoa "ylös, ylös, alas, alas" tai toiset vastaavasti "alas, alas, ylös, ylös". Kommutaattorit ovat hyvä keino muodostaa 3-syklejä. Kuten aiemmin mainittiin (sivu 9), jos kahdella siirrolla on vain yksi yhteinen alkio, niiden kommutaattori on 3-sykli. Siirroilla C ja D on yhteisenä yksi särmäpala ja kaksi kulmapalaa, sekä tietysti niiden ruudut. Särmäpaloille, joita oli yksi yhteinen, syntyy mainittu 3-sykli.

Sarjassa V_y kulmapalat ACD ja CDL sekä ABC ja ADE vaihtavat keskenään paikkaa ja samalla särmäpalat AC, CD ja AD kiertävät askeleen myötäpäivään. Sarjassa O_y kulmapalat vaihtavat paikkaa kuten edellä (asento on eri), mutta särmäpalat kiertävät vastapäivään. Siirtosarjat ovat toistensa käänteissiirtoja.

Sarjassa V_a kulmapalat ACD ja CDL sekä CKL ja DHL vaihtavat keskenään paikkaa ja särmäpalat CD, CL ja DL kiertävät vastapäivään. Sarja O_a on edellisen käänteissiirto.

Kun mikä tahansa näistä siirtosarjoista tehdään kahdesti, kulmapalat palaavat oikeille paikoilleen (eri asentoon) ja särmäpalat kiertävät toisen askeleen joko myötä- tai vastapäivään. Tätä käytettiin hyväksi särmäpalojen 3-syklissä eli siirtosarjassa (3.2), jossa särmäpalat kiertyvät myötäpäivään. Tehtäessä siirtosarja $(\mathrm{C^*DCD^*})^2$ samat särmät kiertävät vastapäivään. Edelleen jos siirtosarja tehdään kolmesti, kulmat vaihtavat jälleen paikkoja, mutta särmät palaavat alkuperäisille paikoilleen. Kuudesti toistettuna siirtosarja palaa takaisin alkuperäiseen tilaan.

4.2 Särmäpalojen 3-sykli

Tekemäni särmäpalojen 3-sykli (3.2) eli $\mathrm{DC^*D^*CDC^*D^*C} = (\mathrm{DC^*D^*C})^2$ perustuu suoraan edellä mainittuihin alkeisoperaatioihin ja siinä neljä kulmapalaa vaihtoivat asentoaan (ABC ja ADE kääntyivät vastapäivään, ACD ja CDL myötäpäivään). Kulmapalojen kääntymisen korjasi siirtosarja (3.3) eli

$$\begin{aligned}&\mathrm{D^*(C^*ACA^*)^2D(AC^*A^*C)^2(A^*DAD^*)^2C^*}\\&\mathrm{(DA^*D^*A)^2CD^*(A^*EAE^*)^2D(EA^*E^*A)^2}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Muodostin siirtosarjan (4.5) käyttämällä kulmien kääntämiseen tarkoitettua siirtosarjaa (3.10) eli $(\mathrm{C^*DCD^*})^2\mathrm{L^*}(\mathrm{DC^*D^*C})^2\mathrm{L}$ kolme kertaa niin, että välillä käännetään koko monitahokasta sopivasti. Ensin suoritetaan siirtosarjan (3.10) käänteissiirto niin, että sivun A paikalla on sivu B, sivu C on paikallaan ja sivun D paikalla on sivu A. Näin ollen kulmapala ACD kääntyy myötäpäivään ja CDL vastapäivään. Seuraavaksi siirtosarja (3.10) suoritetaan niin, että sivuja A, C ja D tilalla ovat E, A ja D. Kulmapala ACD kääntyy vastapäivään ja ABC myötäpäivään. Viimeisenä suoritetaan siirron (3.10) käänteissiirto niin, että sivuja A, C ja D vastaavat sivut F, A ja E. Kulmapala ADE kääntyy myötäpäivään ja ACD vastapäivään.

4.3 Kulmapalojen 3-sykli

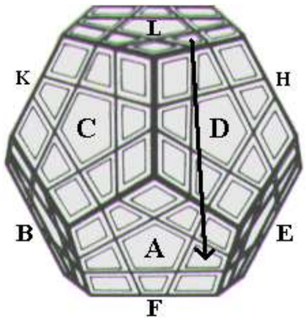
Siirtosarjassa (3.6) eli $\mathrm{D^*ADL^*D^*A^*DL}$ tehtiin kulmapalojen 3-sykli. (Vrt. Häsä 2012, 73). Siirtosarja on kommutaattori $[f, g]$, jossa $f = \mathrm{L}$ ja $g = \mathrm{D^*A^*D}$. Tämä toimii kuin määritelmän 2.12 jälkeisen esimerkin kommutaattori: siirroilla on vain yksi yhteinen alkio, kulmapala CDL, jota ne liikuttavat. Ensin g^{-1} liikuttaa kulman CDL paikkaan ACD, f^{-1} ei liikuta sitä, g palauttaa sen paikkaan CDL, josta f vie sen paikkaan CKL. Siirto g^{-1} ei liikuta palaa CKL, f^{-1} vie sen paikkaan CDL, josta g liikuttaa sen paikkaan ABC eikä f liikuta sitä. Pala ABC taas liikkuu siirrossa g^{-1} paikalle CDL, f^{-1} vie sen paikkaan DHL, g pitää sen paikallaan ja f palauttaa sen paikkaan CDL. Tästä muodostuu siis 3-sykli $(a\ f(a)\ g(a))$ eli tässä tapauksessa (CDL CKL ABC).

4.4 Särmäpalojen kääntäminen

Kaavassa (3.9) esiteltiin tekemäni kahden särmäpalan kääntämisen siirtosarja

$$\text{D*D*AAFEA*DDL*D*D*AE*F*A*A*DDL}, \tag{4.6}$$

joka kääntää särmäpalat CL ja DL. Samalla se tekee kulmapaloille syklin (CDL DHL CKL). Siirtosarja on siirtojen $f = \text{L}$ ja $g = \text{E*F*A*}$ kommutaattori, joskin g on konjugoitu sarjalla $h = \text{A*DD}$, siis $[f, hgh^{-1}]$. Siirrot f ja g eivät liikuta yhtään yhteistä palaa. Siirto D*C*L* kääntäisi särmäpalan DL toiseen asentoon tahkon C kautta. Tämä tietysti sekoittaa monitahokkaan muita paloja. Siirto g kääntää särmäpalan AE samalla periaatteella tahkon F kautta.



Kuva 35: Siirtosarjan h^{-1} vaikutus käännettävään särmäpalaan

Siirtosarja syntyi tällä idealla: halutaan kääntää särmäpalat CL ja DL. Kuljetetaan ensin pala DL siirrolla h^{-1} paikkaan AE ja sitten käännetään se siirrolla $g^{-1} = \text{AFE}$. Kumotaan kuljetukseen käytetyt siirrot. Tehdään siirto f^{-1}, joka siirtää palan CL palan DL paikalle. Tehdään edellistä vastaava kuljetus, mutta saman käännön sijasta tehdään g^{-1}:n käänteissiirto $g = \text{E*F*A*}$ ja kumotaan kuljetus. Näin palautetaan kaikki sivujen A, E ja F palat paikoilleen. Viimeisenä tehdään siirto f, jolloin monitahokkaassa on kokonaisuudessaan kääntynyt kaksi haluttua särmäpalaa. Koska siirroilla f ja hgh^{-1} on yhteisen särmäpalan DL lisäksi kaksi yhteistä kulmapalaa CDL ja DHL, niin koko siirron jälkeen kolme kulmapalaa ovat vaihtaneet paikkaa. Jos kulmapalat haluaa palauttaa paikoilleen, täytyy siirtosarja tehdä kolme kertaa.

Mèffert's Megaminx Solutionin siirtosarja (4.7) kääntää samat särmäpalat kuin siirtosarja (4.6). Samalla se muuttaa tahkon L neljän takimmaisen ja tahkon A ylimmän kulman paikkoja. Siirtoja kertyy yhteensä 42. Jos haluaa kumota kulmapalojen paikkojen vaihtumisen, sarja täytyy tehdä viisi kertaa, jolloin käännöksiä tulee yhteensä 210 kappaletta. Tämän vuoksi aiemmin esitetty sarja voi olla miellyttävämpi, koska siinä samaan tulokseen päästään 60 siirrolla. Vaihtoehtoinen siirtosarja on kuitenkin käytännössä nopea suorittaa yksinkertaisen rakenteen ja toistojen vuoksi.

$$(\text{D*CDC*L*})^4\text{L*}(\text{D*CDC*L*})^4\text{L}. \tag{4.7}$$

4.5 Kulmapalojen kääntäminen

Mèffert's Megaminx Solutionin siirtosarja (3.10) eli $(\mathrm{C^*DCD^*})^2\mathrm{L^*}(\mathrm{DC^*D^*C})^2\mathrm{L}$ on kommutaattori, jossa $f = \mathrm{L}$ ja $g = (\mathrm{DC^*D^*C})^2$. Näidenkin siirtosarjojen ainoa yhteinen muuttuva pala on CDL, mutta g vain kääntää sitä. Kommutaattorissa ensin siirto g^{-1} kääntää palaa CDL vastapäivään, minkä jälkeen f^{-1} vie sen pois paikaltaan ja tuo siihen tilalle palan CKL. Siirtosarja g, joka perustuu edellä mainittuihin alkeisoperaatioihin, kääntää nyt palaa CKL myötäpäivään ja f palauttaa kummankin palan takaisin paikoilleen. Koko siirtosarjan lopputuloksena kaksi kulmaa on vaihtanut asentoa.

4.6 Vaihtoehtoisia ratkaisutapoja

Tässä työssä esitetty algoritmi nojautuu ryhmäteoriaan eikä sen tapa ratkaista Megaminx ehkä ole kaikista käytännöllisin. Jos lähes kaikki palat ovat poissa paikoiltaan tai ainakin väärissä asennoissa, ei ole aina helppoa hahmottaa niiden sijaintia tai oikeaa paikkaa, koska kaikki sivut ovat täynnä eri värejä. Lähes yksivärisistä sivuista poikkeavat palat näkee helpommin. Tämän työn ratkaisumalli perustuu siihen, että ensin laitetaan kaikki palat oikeille paikoilleen ja vasta sen jälkeen käännetään ne oikeisiin asentoihin. Tällöin monitahokas näyttää pitkään sekaiselta. Voidaan huomata, että vaikka särmäpalojen 3-syklissä ja kahden särmäpalan kääntämisessä liikkuvat tai kääntyvät myös kulmapalat, itse kulmapaloihin kohdistuvissa siirroissa särmät pysyvät muuttumattomina. Näin ollen ratkaisu voidaan suorittaa myös laittamalla ensin särmäpalat oikeille paikoille ja oikeaan asentoon ja siirtyä vasta sen jälkeen kulmapaloihin. Tässä vaihtoehdossa on etuna se, että monitahokas alkaa nopeammin näyttää selkeämmältä. Lisäksi esimerkiksi särmäpalojen kiertoa voidaan yksinkertaistaa siirtosarjoiksi V_y ja O_y.

Mèffert's Megaminx Solution ratkaisee monitahokkaan osittain kerros kerrokselta. Myös tässä mallissa monitahokas alkaa nopeasti näyttää selkeämmältä ja ratkaistessa voidaan keskittyä vain muutamaan tiettyyn palaan kerrallaan. Mitä aikaisemmassa vaiheessa pulman ratkaiseminen on, sen vähemmän tarvitsee välittää muista monitahokkaan paloista, mikä yksinkertaistaa siirtosarjoja. Rubikin kuution ratkaisemiseen on tarjolla eri lähteissä useita erilaisia siirtosarjoja, joita voi osittain soveltaa myös Megaminxin ensimmäisten kerrosten ratkaisuun. Usein loppuvaiheessa on kuitenkin helpoin siirtyä tässä tutkielmassa esitetyn algoritmin siirtoihin.

Lähteet

[1] Metsänkylä, T. ja Näätänen, M.: Algebra, Limes ry, Helsinki, 2005 (2. korjattu painos)
Uusittu versio osoitteessa solmu.math.helsinki.fi/2010/algebra.pdf [viitattu 13.12.2013]

[2] Häsä, J.: Ryhmäteoreettinen näkökulma Rubikin kuutioon osoitteessa www.cs.helsinki.fi/u/jhasa/kurssit/rubik_s12/materiaali_rubik12.pdf [viitattu 13.12.2013]

[3] Endl, K.: Mèffert's Megaminx Solution osoitteessa www.mefferts.com/puzzles/megasol1.html [viitattu 13.12.2013]

Kolmen palan kombinaatioiden ja palojen numerointia osoittavat kuvat (7–17, 20–26, 28–30, 32–34 ja 36–102) muokattu lähteestä:

[4] Longridge, M.: Cubeman's Megaminx Links, www.cubeman.org/megalink.html [viitattu 13.12.2013]

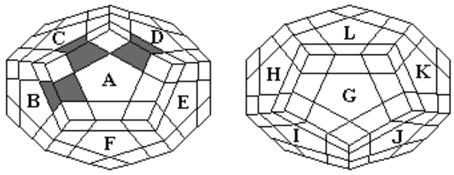
Muut kuvat (1–6, 18–19, 27, 31 ja 35) muokattu lähteestä:

[5] Endl, K.: Mèffert's Megaminx Solution, www.mefferts.com/puzzles/megasol1.html [viitattu 13.12.2013]

Liite A: Särmäpalojen kombinaatiot

a. Kaikki kolme palaa samalla sivulla.

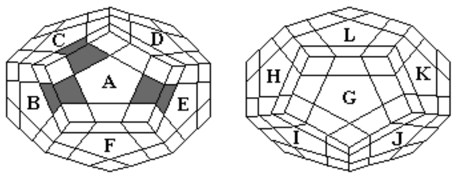
a1. Kaikki kolme palaa vierekkäin (kuva 36). Nämä kolme palaa voivat sijaita yhdellä sivulla viidellä eri tavalla (voidaan ajatella esimerkiksi kolmesta särmäpalasta keskimmäistä palaa, joka voi yhdellä sivulla olla viidessä eri paikassa), ja kyseinen sivu voidaan valita 12 eri vaihtoehdosta. Näin ollen kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



Kuva 36: Särmäpalojen kombinaatio a1

Jos palat ovat AB, AC ja AD, siirto f^{-1} on DA.

a2. Kaksi palaa vierekkäin ja kolmas niiden välisen kulman vastaisella särmällä (kuva 37). Nyt voidaan ajatella kolmannen särmäpalan paikkaa, joten edellisen tavoin kombinaatioita on $5 \cdot 12 = 60$.



Kuva 37: Särmäpalojen kombinaatio a2

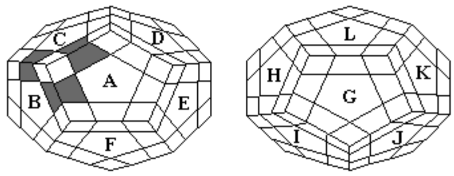
Jos palat ovat AB, AC ja AE, siirto f^{-1} on A*DA^2.

Joukossa a on yhteensä 120 kombinaatiota.

b. Kaksi palaa vierekkäin samalla sivulla ja kolmas tämän sivun puoleisella monitahokkaan puoliskolla.

b1. Kaikki palat ovat yhden kulman ympärillä (kuva 38). Yhdelle kulmalle palat voidaan valita vain yhdellä tavalla ja kulmapaloja on 20, joten myös kombinaatioita on 20. Voidaan myös ajatella, että kuvio on kiertosymmetrinen, koska koko kappale voidaan kääntää kolmeen eri asentoon niin, että kyseinen kulmapala pysyy paikallaan ja kombinaation kolme särmäpalaa vaihtavat keskenään paikkoja. Tällöin kombinaatioiden määrä laskettaisiin kaavasta $5 \cdot 12 : 3 = 20$, josta saadaan vastaukseksi sama luku.

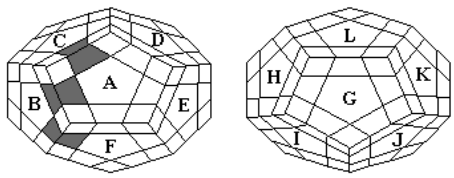
Jos palat ovat AB, AC ja BC, siirto f^{-1} on A*C*^{2}A^2. Toisaalta palat ovat jo valmiiksi toivotussa asemassa, joten koko kappaleen kääntäminen riittää.



Kuva 38: Särmäpalojen kombinaatio b1

Tällöin sivusta B tulee sivu C ja sivusta C sivu D. Sivu A pysyy samana. Symmetria huomataan tässä uudessa asennossa, kun pidetään kulmapala ACD paikallaan ja vaihdetaan sivujen A, C ja D paikkoja myötäpäivään ensin kerran ja sen jälkeen uudestaan.

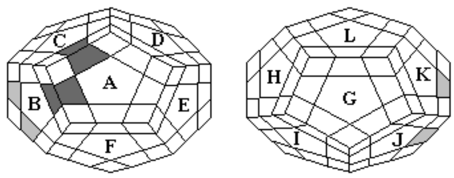
b2. Kaksi palaa on vierekkäin samalla sivulla ja kolmas on niistä ensimmäisen vieressä, kun edetään toista sivua myötäpäivään (kuva 39). Tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun käännetään koko kappaletta niin, että ensimmäinen pala kääntyy paikallaan 180 astetta, vaihtavat toinen ja kolmas pala paikkoja keskenään. Ensimmäinen pala voi olla kaikilla 12 sivulla viidessä eri paikassa, mutta osa näistä kombinaatioista on siis samoja edellä mainitun symmetrian vuoksi. Tällöin kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 2 = 30$.



Kuva 39: Särmäpalojen kombinaatio b2

Jos palat ovat AB, AC ja BF, siirto f^{-1} on A*, mihin yhdistetään koko monitahokkaan kääntö ja sivujen uudelleennimeäminen niin, että sivu A on edelleen A, sivusta F tulee C ja sivusta B tulee D. Symmetria huomataan, jos käännetään sivu A sivuksi B, sivu B sivuksi A ja sivu F sivuksi C.

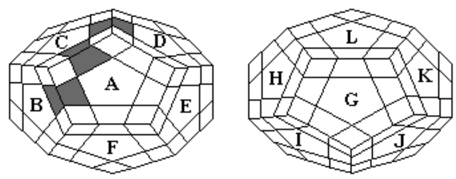
b3. Kaksi palaa on vierekkäin samalla sivulla ja kolmas on ensimmäisen palan toisella sivulla ensimmäisen särmäpalan viereisen kulman vastakkaisella särmällä (kuva 40). Kolmannen palan vaihtoehtoja on kaksi, joten kombinaatioiden määrä on $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$.



Kuva 40: Särmäpalojen kombinaatio b3

Jos ensimmäiset palat ovat AB ja AC, kolmas pala on BJ tai BK ja siirto f^{-1} on AB^{n}A*, missä n on 1 tai 2 siten, että kolmas särmäpala saadaan paikalle BC. Tähän yhdistetään koko monitahokkaan kääntö ja sivujen uudelleennimeäminen niin, että sivu A on edelleen A, sivusta B tulee C ja sivusta C tulee D. Palalle BJ $n = 2$ ja palalle BK $n = 1$.

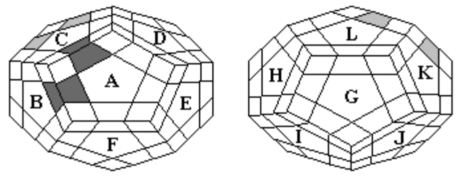
b4. Kaksi palaa on vierekkäin samalla sivulla ja kolmas on niistä toisen vieressä, kun edetään sen toista sivua vastapäivään (kuva 41). Tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun käännetään koko kappaletta niin, että toinen pala kääntyy paikallaan 180 astetta, vaihtavat ensimmäinen ja kolmas pala paikkoja keskenään. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 2 = 30$.



Kuva 41: Särmäpalojen kombinaatio b4

Jos palat ovat AB, AC ja CD, siirto f^{-1} on A. Symmetria huomataan, jos käännetään sivu A sivuksi C, sivu B sivuksi D ja sivu C sivuksi A.

b5. Kaksi palaa on vierekkäin samalla sivulla ja kolmas on toisen palan toisella sivulla toisen särmäpalan viereisen kulman vastakkaisella särmällä (kuva 42). Kolmannen palan vaihtoehtoja on kaksi, joten kombinaatioiden määrä on $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$.

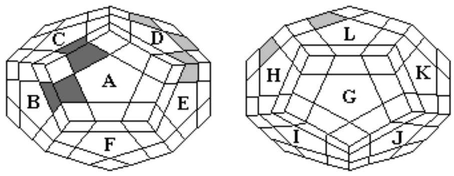


Kuva 42: Särmäpalojen kombinaatio b5

Jos ensimmäiset palat ovat AB ja AC, kolmas pala on CK tai CL ja siirto f^{-1} on A*C^{n}A^2, missä n on 1 tai 2 siten, että kolmas särmäpala saadaan paikalle CD. Palalle CK $n = 2$ ja palalle CL $n = 1$.

b6. Kaksi palaa on vierekkäin samalla sivulla ja kolmas on toisen särmäpalan viereisen särmän toisella sivulla olevista särmistä myötäpäivään toinen, kolmas tai neljäs (kuva 43). Kolmannen palan vaihtoehtoja on kolme, joten kombinaatioiden määrä on $3 \cdot 5 \cdot 12 = 180$.

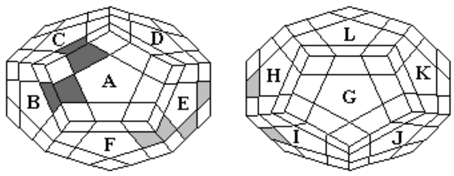
Jos ensimmäiset palat ovat AB ja AC, kolmas pala on DL, DH tai DE ja siirto f^{-1} on D*^{n}A. Siirtosarjan n on 1, 2 tai 3 siten, että kolmas särmäpala



Kuva 43: Särmäpalojen kombinaatio b6

saadaan paikalle CD. Palalle DL $n = 1$, palalle DH $n = 2$ ja palalle DE $n = 3$.

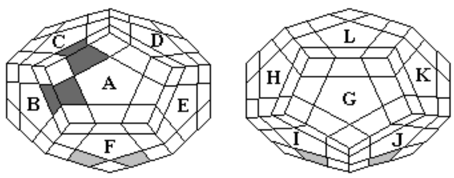
b7. Kaksi palaa on vierekkäin samalla sivulla ja kolmas on niiden välisen kulman vastaisen särmän toisella sivulla myötäpäivään toinen, kolmas tai neljäs (kuva 44). Kolmannen palan vaihtoehtoja on kolme, joten kombinaatioiden määrä on $3 \cdot 5 \cdot 12 = 180$.



Kuva 44: Särmäpalojen kombinaatio b7

Jos ensimmäiset palat ovat AB ja AC, kolmas pala on EH, EI tai EF ja siirto f^{-1} on $\mathrm{E}^{*n}\mathrm{D}^2\mathrm{A}$. Siirtosarjan n on 1, 2 tai 3 siten, että kolmas särmäpala saadaan paikalle DE. Palalle EH $n = 1$, palalle EI $n = 2$ ja palalle EF $n = 3$.

b8. Kaksi palaa on vierekkäin samalla sivulla ja kolmas on niitä edeltävän särmän toisella sivulla myötäpäivään toinen tai kolmas (kuva 45). Kolmannen palan vaihtoehtoja on kaksi, joten kombinaatioiden määrä on $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$.



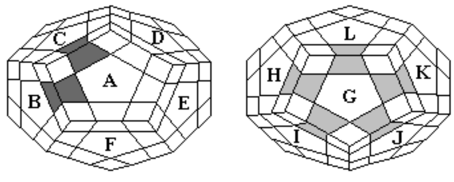
Kuva 45: Särmäpalojen kombinaatio b8

Jos ensimmäiset palat ovat AB ja AC, kolmas pala on FJ tai FI ja siirto f^{-1} on $\mathrm{F}^n\mathrm{A}^*$, mihin yhdistetään koko monitahokkaan kääntö ja sivujen uudelleennimeäminen niin, että sivu A on edelleen A, sivusta F tulee C ja sivusta B tulee D. Siirtosarjan n on 1 tai 2 siten, että kolmas särmäpala saadaan paikalle BF. Palalle FJ $n = 1$ ja palalle FI $n = 2$.

Joukossa b on yhteensä 800 kombinaatiota.

c. Kaksi palaa vierekkäin samalla sivulla ja kolmas tämän sivun vastakkaisen sivun monitahokkaan puoliskolla.

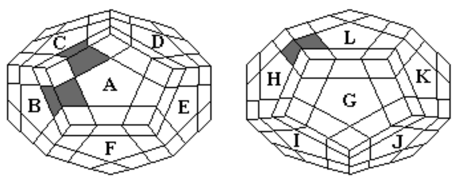
c1. Kaksi palaa on vierekkäin samalla sivulla ja kolmas on tämän sivun vastakkaisen sivun jollakin särmällä (kuva 46). Kolmannen palan vaihtoehtoja on viisi, joten kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 5 \cdot 12 = 300$.



Kuva 46: Särmäpalojen kombinaatio c1

Jos ensimmäiset palat ovat AB ja AC, kolmas pala on GH, GL, GK, GJ tai GI ja siirto f^{-1} on G^{n}L^{2}D*A. Siirtosarjan n on 0, 1, 2, 3 tai 4 siten, että kolmas särmäpala saadaan paikalle GL. Valinta $n = 0$ tarkoittaa, että pala on jo oikealla paikalla, eikä siirtoa G tehdä ollenkaan. Palalle GH $n = 1$, palalle GK $n = 4$, palalle GJ $n = 3$ ja palalle GI $n = 2$.

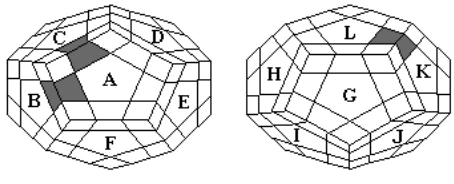
c2. Kaksi palaa on vierekkäin samalla sivulla ja kolmas on tämän sivun vastakkaisen sivun ja kahden ensimmäisen särmäpalan jälkeisen särmän toisen sivun välinen särmäpala (kuva 47). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



Kuva 47: Särmäpalojen kombinaatio c2

Jos kaksi ensimmäistä palaa ovat AB ja AC, kolmas pala on HL ja siirto f^{-1} on LD*A.

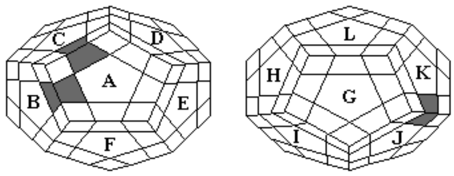
c3. Kaksi palaa on vierekkäin samalla sivulla ja kolmas on tämän sivun vastakkaisen sivun ja toisen särmäpalan toisen sivun välinen särmäpala (kuva 48). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



Kuva 48: Särmäpalojen kombinaatio c3

Jos kaksi ensimmäistä palaa ovat AB ja AC, kolmas pala on KL ja siirto f^{-1} on L^{*2}D*A.

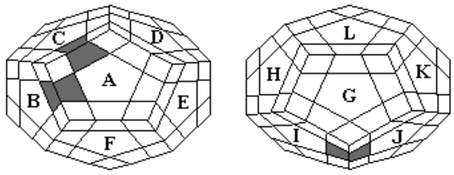
c4. Kaksi palaa on vierekkäin samalla sivulla ja kolmas on tämän sivun vastakkaisen sivun ja ensimmäisen särmäpalan toisen sivun välinen särmäpala (kuva 49). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



Kuva 49: Särmäpalojen kombinaatio c4

Jos kaksi ensimmäistä palaa ovat AB ja AC, kolmas pala on JK ja siirto f^{-1} on KG*L^{2}D*A.

c5. Kaksi palaa on vierekkäin samalla sivulla ja kolmas on tämän sivun vastakkaisen sivun ja kahta ensimmäistä särmäpalaa edeltävän särmän toisen sivun välinen särmäpala (kuva 50). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



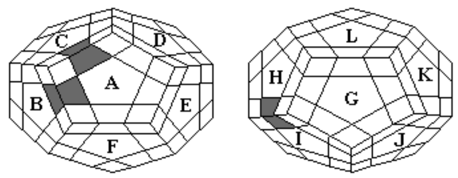
Kuva 50: Särmäpalojen kombinaatio c5

Jos kaksi ensimmäistä palaa ovat AB ja AC, kolmas pala on IJ ja siirto f^{-1} on J*FA*, mihin yhdistetään koko monitahokkaan kääntö ja sivujen uudelleennimeäminen niin, että sivu A on edelleen A, sivusta F tulee C ja sivusta B tulee D. Vaihtoehtoisesti siirto f^{-1} voisi olla I*GH*LD*A, jolloin monitahokkaan kääntöä tai sivujen uudelleennimeämistä ei tarvita.

c6. Kaksi palaa on vierekkäin samalla sivulla ja kolmas on tämän sivun vastakkaisen sivun ja kahden ensimmäisen särmäpalan välisen kulman vastaisen särmän toisen sivun välinen särmäpala (kuva 51). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.
Jos kaksi ensimmäistä palaa ovat AB ja AC, kolmas pala on HI ja siirto f^{-1} on H^{2}D^{*2}A.

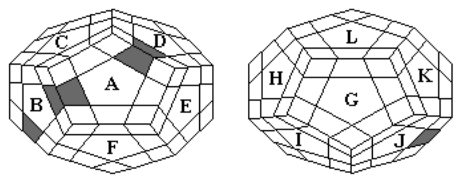
Joukossa c on yhteensä 600 kombinaatiota.

d. Kaksi palaa on samalla sivulla ja kolmas tämän sivun monitahokkaan puoliskolla. Mitkään kaksi palaa eivät ole vierekkäin.



Kuva 51: Särmäpalojen kombinaatio c6

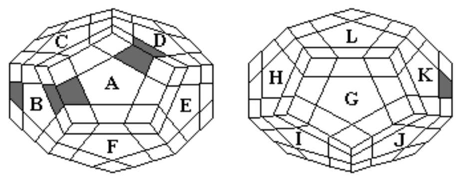
d1. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi särmäpala. Kolmas pala on ensimmäisen palan toisella sivulla toinen myötäpäivään (kuva 52). Tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun käännetään koko kappaletta niin, että ensimmäinen pala kääntyy paikallaan 180 astetta, vaihtavat toinen ja kolmas pala paikkoja keskenään. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 2 = 30$.



Kuva 52: Särmäpalojen kombinaatio d1

Jos kaksi ensimmäistä palaa ovat AB ja AD, kolmas pala on BJ ja siirto f^{-1} on DAB^{*2}A. Symmetria huomataan, jos käännetään sivu A sivuksi B ja sivu B sivuksi A.

d2. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi särmäpala. Kolmas pala on ensimmäisen palan toisella sivulla toinen vastapäivään (kuva 53). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.

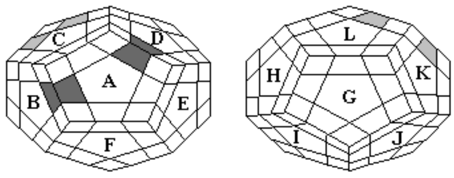


Kuva 53: Särmäpalojen kombinaatio d2

Jos kaksi ensimmäistä palaa ovat AB ja AD, kolmas pala on BK ja siirto f^{-1} on DAB^{2}A.

d3. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi särmäpala. Kolmas pala on keskellä olevan palan toisella sivulla toinen myötäpäivään tai toinen vastapäivään (kuva 54). Kombinaatioiden määrä on $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$.

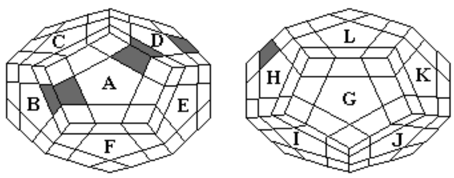
Jos kaksi ensimmäistä palaa ovat AB ja AD, kolmas pala on CK tai CL ja siirto f^{-1} on C^{*n}B*C^{*2}. Siirtosarjan n on 0 tai 1 siten, että kolmas särmäpala



Kuva 54: Särmäpalojen kombinaatio d3

saadaan paikalle CK. Palalle CK $n = 0$ ja palalle CL $n = 1$.

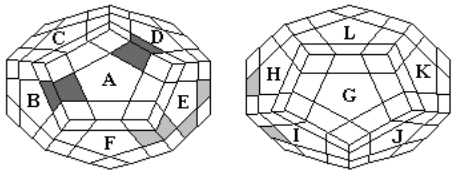
d4. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi särmäpala. Kolmas pala on toisen palan toisella sivulla toinen vastapäivään (kuva 55). Tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun käännetään koko kappaletta niin, että toinen pala kääntyy paikallaan 180 astetta, vaihtavat ensimmäinen ja kolmas pala paikkoja keskenään. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 2 = 30$.



Kuva 55: Särmäpalojen kombinaatio d4

Jos kaksi ensimmäistä palaa ovat AB ja AD, kolmas pala on DH ja siirto f^{-1} on DACDC*. Symmetria huomataan, jos käännetään sivu A sivuksi D ja sivu D sivuksi A.

d5. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi särmäpala. Kolmas pala on toisen palan jälkeisen särmäpalan toisella sivulla toinen, kolmas tai neljäs myötäpäivään (kuva 56). Kombinaatioiden määrä on $3 \cdot 5 \cdot 12 = 180$.

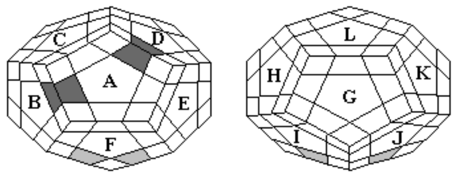


Kuva 56: Särmäpalojen kombinaatio d5

Jos kaksi ensimmäistä palaa ovat AB ja AD, kolmas pala on EH, EI tai EF ja siirto f^{-1} on E$*^n$D*AD^2. Siirtosarjan n on 1, 2 tai 3 siten, että kolmas särmäpala saadaan paikalle DE. Palalle EH $n = 1$, palalle EI $n = 2$ ja palalle EF $n = 3$.

d6. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi särmäpala.

Kolmas pala on ensimmäistä edeltävän särmäpalan toisella sivulla toinen tai kolmas myötäpäivään (kuva 57). Kombinaatioiden määrä on $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$.



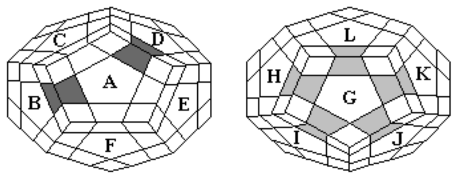
Kuva 57: Särmäpalojen kombinaatio d6

Jos kaksi ensimmäistä palaa ovat AB ja AD, kolmas pala on FI tai FJ ja siirto f^{-1} on $\mathrm{DF}^n\mathrm{A}^2$. Siirtosarjan n on 2 tai 3 siten, että kolmas särmäpala saadaan paikalle FA. Palalle FI $n = 3$ ja palalle FJ $n = 2$.

Joukossa d on yhteensä 540 kombinaatiota.

e. Kaksi palaa on samalla sivulla ja kolmas tämän sivun vastakkaisen sivun monitahokkaan puoliskolla. Mitkään kaksi palaa eivät ole vierekkäin.

e1. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi särmäpala. Kolmas pala on tämän sivun vastakkaisen sivun jollakin särmällä (kuva 58). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 5 \cdot 12 = 300$.



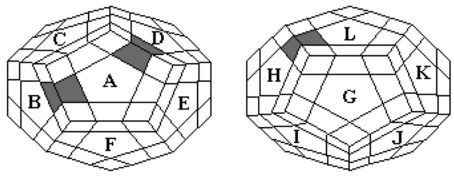
Kuva 58: Särmäpalojen kombinaatio e1

Jos kaksi ensimmäistä palaa ovat AB ja AD, kolmas pala on GH, GL, GK, GJ tai GI ja siirto f^{-1} on $\mathrm{B^*A^*BG}^n\mathrm{L}^2\mathrm{D^*A}$. Siirtosarjan n on 0, 1, 2, 3 tai 4 siten, että kolmas särmäpala saadaan paikalle GL. Palalle GH $n = 1$, palalle GK $n = 4$, palalle GJ $n = 3$ ja palalle GI $n = 2$.

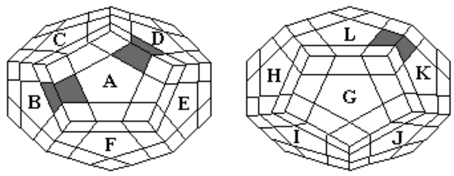
e2. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi särmäpala. Kolmas pala on tämän sivun vastakkaisen sivun ja toisen särmäpalan toisen sivun välinen särmäpala (kuva 59). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.

Jos kaksi ensimmäistä palaa ovat AB ja AD, kolmas pala on HL ja siirto f^{-1} on B*A*BLD*A.

e3. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi särmäpala. Kolmas pala on tämän sivun vastakkaisen sivun ja kahden ensimmäisen palan välisen särmäpalan toisen sivun välinen särmäpala (kuva 60). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



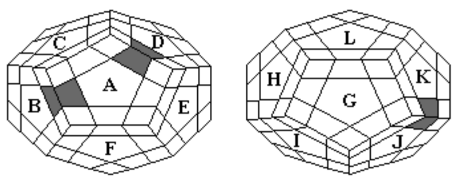
Kuva 59: Särmäpalojen kombinaatio e2



Kuva 60: Särmäpalojen kombinaatio e3

Jos kaksi ensimmäistä palaa ovat AB ja AD, kolmas pala on KL ja siirto f^{-1} on B*A*BL*^{2}D*A.

e4. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi särmäpala. Kolmas pala on tämän sivun vastakkaisen sivun ja ensimmäisen särmäpalan toisen sivun välinen särmäpala (kuva 61). Kombinaatioiden määrä on $5{\cdot}12 = 60$.



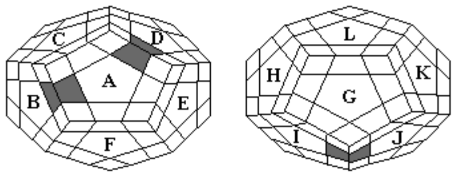
Kuva 61: Särmäpalojen kombinaatio e4

Jos kaksi ensimmäistä palaa ovat AB ja AD, kolmas pala on JK ja siirto f^{-1} on B*A*BKG*L^{2}D*A.

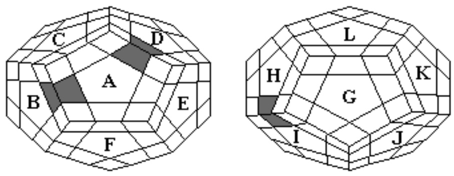
e5. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi särmäpala. Kolmas pala on tämän sivun vastakkaisen sivun ja ensimmäistä särmäpalaa edeltävän särmän toisen sivun välinen särmäpala (kuva 62). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.

Jos kaksi ensimmäistä palaa ovat AB ja AD, kolmas pala on IJ ja siirto f^{-1} on DJ*F^{2}A^2.

e6. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi särmäpala. Kolmas pala on tämän sivun vastakkaisen sivun ja toisen särmäpalan jälkeisen särmän toisen sivun välinen särmäpala (kuva 63). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



Kuva 62: Särmäpalojen kombinaatio e5



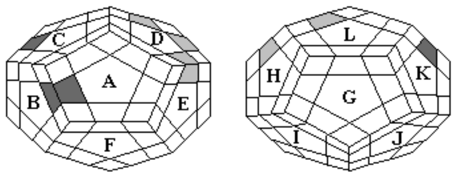
Kuva 63: Särmäpalojen kombinaatio e6

Jos kaksi ensimmäistä palaa ovat AB ja AD, kolmas pala on HI ja siirto f^{-1} on D*AH^{2}D^2.

Joukossa e on yhteensä 600 kombinaatiota.

f. Kaksi palaa on vierekkäisillä sivuilla siten, että toinen on ensimmäisen palan jälkeisen särmäpalan toisella sivulla toinen myötäpäivään. Mitkään kaksi palaa eivät ole samalla sivulla.

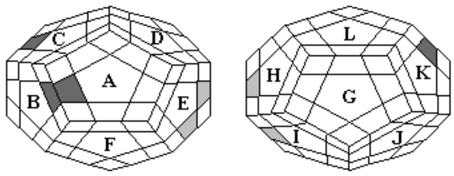
f1. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen palan jälkeen myötäpäivään toisen särmäpalan toisella sivulla toinen, kolmas tai neljäs myötäpäivään (kuva 64). Kombinaatioiden määrä on $3 \cdot 5 \cdot 12 = 180$.



Kuva 64: Särmäpalojen kombinaatio f1

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CK ja kolmas pala on DL, DH tai DE. Tällöin siirto f^{-1} on B*D^{n}C*^{2}. Siirtosarjan n on 1, 2 tai 3 siten, että kolmas särmäpala saadaan paikalle AD. Palalle DL $n = 3$, palalle DH $n = 2$ ja palalle DE $n = 1$.

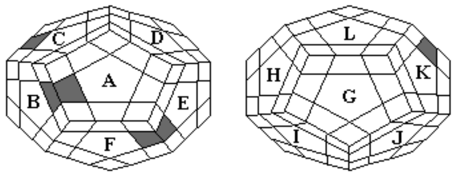
f2. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen palan jälkeen myötäpäivään kolmannen särmäpalan toisella sivulla toinen tai kolmas myötäpäivään (kuva 65). Kombinaatioiden määrä on $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$.



Kuva 65: Särmäpalojen kombinaatio f2

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CK ja kolmas pala on EH tai EI. Tällöin siirto f^{-1} on $\mathrm{B^*E^{*n}DC^{*2}}$. Siirtosarjan n on 1 tai 2 siten, että kolmas särmäpala saadaan paikalle DE. Palalle EH $n = 1$ ja palalle EI $n = 2$.

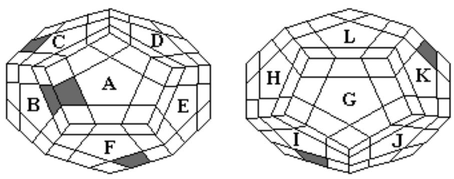
f3. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen palan jälkeen myötäpäivään kolmannen särmäpalan toisella sivulla ensimmäinen vastapäivään (kuva 66). Tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun käännetään koko kappaletta niin, että ensimmäinen pala kääntyy paikallaan 180 astetta, vaihtavat toinen ja kolmas pala paikkoja keskenään. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 2 = 30$.



Kuva 66: Särmäpalojen kombinaatio f3

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CK ja kolmas pala on EF. Tällöin siirto f^{-1} on $\mathrm{C^2F^*A^2}$. Symmetria huomataan, jos käännetään sivu C sivuksi F ja sivu F sivuksi C.

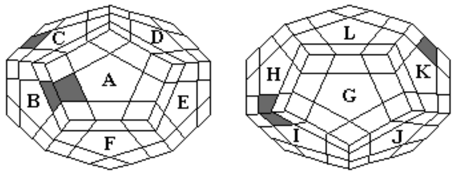
f4. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäistä palaa edeltävän särmäpalan toisella sivulla toinen myötäpäivään (kuva 67). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



Kuva 67: Särmäpalojen kombinaatio f4

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CK ja kolmas pala on FI. Tällöin siirto f^{-1} on $\mathrm{C^2F^{*2}A^2}$.

f5. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen sivun vastakkaisen sivun ja ensimmäisen palan jälkeen myötäpäivään kolmannen särmäpalan toisen sivun välinen särmäpala (kuva 68). Tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun käännetään koko kappaletta niin, että kolmas pala kääntyy paikallaan 180 astetta, vaihtavat ensimmäinen ja toinen pala paikkoja keskenään. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 2 = 30$.



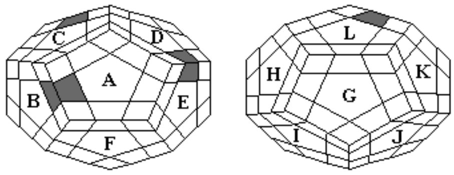
Kuva 68: Särmäpalojen kombinaatio f5

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CK ja kolmas pala on HI. Tällöin siirto f^{-1} on H*^{2}LC^{2}AD*. Symmetria huomataan, jos käännetään sivu B sivuksi C ja sivu C sivuksi B.

Joukossa f on yhteensä 420 kombinaatiota.

g. Kaksi palaa on vierekkäisillä sivuilla siten, että toinen on ensimmäisen palan jälkeisen särmäpalan toisella sivulla toinen vastapäivään. Mitkään kaksi palaa eivät ole samalla sivulla.

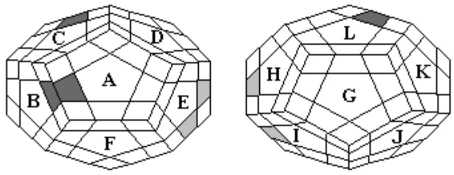
g1. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen palan jälkeen myötäpäivään toisen särmäpalan toisella sivulla ensimmäinen vastapäivään (kuva 69). Tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun käännetään koko kappaletta niin, että kolmen särmäpalan sivujen ainoa yhteinen kulmapala kääntyy paikallaan 120 astetta, ensimmäinen pala siirtyy toisen paikalle, toinen pala siirtyy kolmannen paikalle ja kolmas pala siirtyy ensimmäisen paikalle. Käännös voidaan tehdä uudestaan, jolloin ensimmäinen pala on siirtynyt kolmannen paikalle, toinen ensimmäisen ja kolmas toisen. Vasta kolmannella käännöksellä palat palaavat alkuperäisille paikoilleen, eli symmetrian kertaluku on 3. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 3 = 20$.



Kuva 69: Särmäpalojen kombinaatio g1

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CL ja kolmas pala on DE. Tällöin siirto f^{-1} on C*B*DC*^{2}. Symmetria huomataan, kun pidetään kulmapala ACD paikallaan ja vaihdetaan sivujen A, C ja D paikkoja myötäpäivään ensin kerran ja sen jälkeen uudestaan.

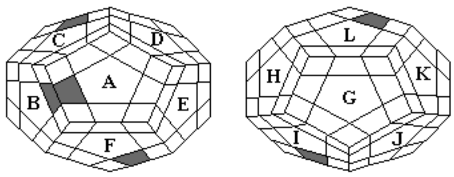
g2. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen palan jälkeen myötäpäivään kolmannen särmäpalan toisella sivulla toinen tai kolmas myötäpäivään (kuva 70). Kombinaatioiden määrä on $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$.



Kuva 70: Särmäpalojen kombinaatio g2

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CL ja kolmas pala on EH tai EI. Tällöin siirto f^{-1} on C*B*E*^{n}DC*^{2}. Siirtosarjan n on 1 tai 2 siten, että kolmas särmäpala saadaan paikalle DE. Palalle EH $n = 1$ ja palalle EI $n = 2$.

g3. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäistä palaa edeltävän särmäpalan toisella sivulla toinen myötäpäivään (kuva 71). Tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun käännetään koko kappaletta niin, että ensimmäinen pala kääntyy paikallaan 180 astetta, vaihtavat toinen ja kolmas pala paikkoja keskenään. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 2 = 30$.



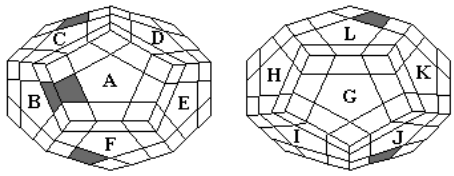
Kuva 71: Särmäpalojen kombinaatio g3

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CL ja kolmas pala on FI. Tällöin siirto f^{-1} on CF*^{2}A^2. Symmetria huomataan, kun vaihdetaan sivujen A ja B paikkoja keskenään.

g4. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäistä palaa edeltävän särmäpalan toisella sivulla toinen vastapäivään (kuva 72). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.

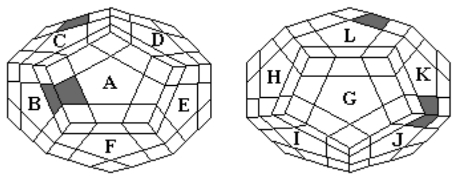
Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CL ja kolmas pala on FJ. Tällöin siirto f^{-1} on CF^{2}A^2.

g5. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen sivun vastakkaisen sivun ja ensimmäisen palan



Kuva 72: Särmäpalojen kombinaatio g4

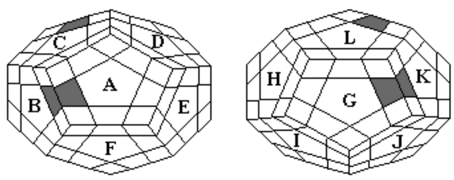
toisen sivun välinen särmäpala (kuva 73). Tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun käännetään koko kappaletta niin, että kolmen särmäpalan sivujen ainoa yhteinen kulmapala kääntyy paikallaan 120 astetta, ensimmäinen pala siirtyy toisen paikalle, toinen pala siirtyy kolmannen paikalle ja kolmas pala siirtyy ensimmäisen paikalle. Symmetrian kertaluku on 3. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 3 = 20$.



Kuva 73: Särmäpalojen kombinaatio g5

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CL ja kolmas pala on JK. Tällöin siirto f^{-1} on CAK*B^{2}A. Symmetria huomataan, kun pidetään kulmapala BCK paikallaan ja vaihdetaan sivujen B, C ja K paikkoja myötäpäivään ensin kerran ja sen jälkeen uudestaan.

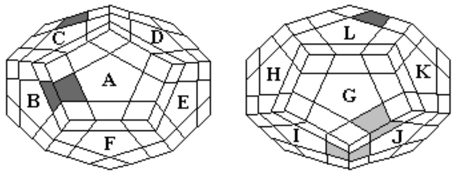
g6. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen sivun vastakkaisen sivun ja ensimmäisen palan toisen sivun välisen särmäpalan jälkeinen särmäpala, joka on ensimmäisen palan sivun vastakkaisella sivulla (kuva 74). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



Kuva 74: Särmäpalojen kombinaatio g6

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CL ja kolmas pala on GK. Tällöin siirto f^{-1} on CAK*^{2}B^{2}A.

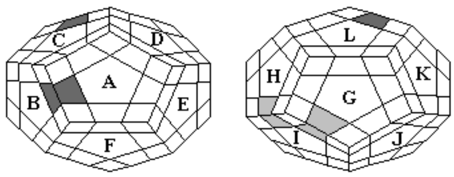
g7. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen sivun vastakkaisen sivun ja ensimmäistä palaa edeltävän särmäpalan toisen sivun välinen särmäpala tai sen jälkeinen särmäpala, joka on ensimmäisen palan sivun vastakkaisella sivulla (kuva 75). Kombinaatioiden määrä on $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$.



Kuva 75: Särmäpalojen kombinaatio g7

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CL ja kolmas pala on IJ tai GJ. Tällöin siirto f^{-1} on CJ*^{n}F^{2}A^2. Siirtosarjan n on 1 tai 2 siten, että kolmas särmäpala saadaan paikalle FJ. Palalle IJ $n = 1$ ja palalle GJ $n = 2$.

g8. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen sivun vastakkaisen sivun ja ensimmäisen palan jälkeen myötäpäivään kolmannen särmäpalan toisen sivun välinen särmäpala tai sen jälkeinen särmäpala, joka on ensimmäisen palan sivun vastakkaisella sivulla (kuva 76). Kombinaatioiden määrä on $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$.



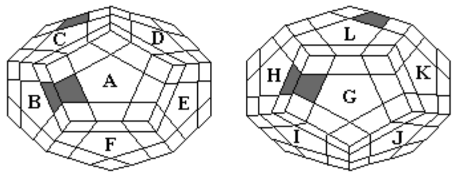
Kuva 76: Särmäpalojen kombinaatio g8

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CL ja kolmas pala on HI tai GI. Tällöin siirto f^{-1} on I*^{n}CH*^{2}LAD*. Siirtosarjan n on 0 tai 1 siten, että kolmas särmäpala saadaan paikalle HI. Palalle HI $n = 0$ ja palalle GI $n = 1$.

g9. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen sivun vastakkaisen sivun ja ensimmäisen palan jälkeen myötäpäivään toisen särmäpalan toisen sivun välisen särmäpalan jälkeinen särmäpala, joka on ensimmäisen palan sivun vastakkaisella sivulla (kuva 77). Tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun käännetään koko kappaletta niin, että toinen pala kääntyy paikallaan 180 astetta, vaihtavat ensimmäinen ja kolmas pala paikkoja keskenään. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 2 = 30$.

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CL ja kolmas pala on GH. Tällöin siirto f^{-1} on H*CLAD*. Symmetria huomataan, kun vaihdetaan sivujen C ja L paikkoja keskenään.

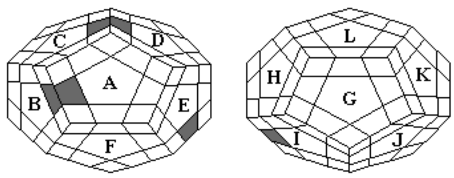
Joukossa g on yhteensä 580 kombinaatiota.



Kuva 77: Särmäpalojen kombinaatio g9

h. Kaksi palaa on vierekkäisillä sivuilla siten, että toinen on ensimmäisen palan jälkeisen särmäpalan toisella sivulla ensimmäinen vastapäivään. Mitkään kaksi palaa eivät ole samalla sivulla.

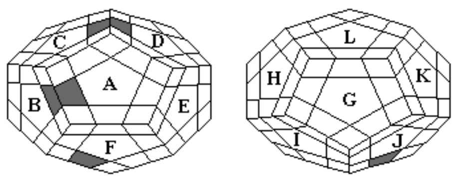
h1. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen palan jälkeen myötäpäivään kolmannen särmäpalan toisella sivulla toinen vastapäivään (kuva 78). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



Kuva 78: Särmäpalojen kombinaatio h1

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CD ja kolmas pala on EI. Tällöin siirto f^{-1} on EF*A^2.

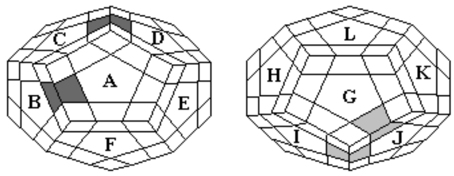
h2. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäistä palaa edeltävän särmäpalan toisella sivulla toinen vastapäivään (kuva 79). Tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun käännetään koko kappaletta niin, että ensimmäinen pala kääntyy paikallaan 180 astetta, vaihtavat toinen ja kolmas pala paikkoja keskenään. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 2 = 30$.



Kuva 79: Särmäpalojen kombinaatio h2

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CD ja kolmas pala on FJ. Tällöin siirto f^{-1} on F^{2}A^2. Symmetria huomataan, jos käännetään sivu A sivuksi B ja sivu B sivuksi A.

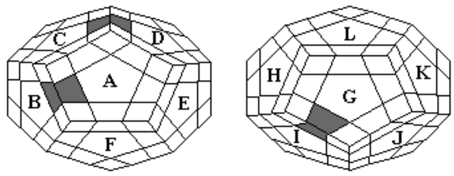
h3. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen sivun vastakkaisen sivun ja ensimmäistä palaa edeltävän särmäpalan toisen sivun välinen särmäpala tai sen jälkeinen särmäpala, joka on ensimmäisen palan sivun vastakkaisella sivulla (kuva 80). Kombinaatioiden määrä on $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$.



Kuva 80: Särmäpalojen kombinaatio h3

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CD ja kolmas pala on IJ tai GJ. Tällöin siirto f^{-1} on J$*^n$F^{2}A^2. Siirtosarjan n on 1 tai 2 siten, että kolmas särmäpala saadaan paikalle FJ. Palalle IJ $n = 1$ ja palalle GJ $n = 2$.

h4. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen sivun vastakkaisen sivun ja ensimmäisen palan jälkeen myötäpäivään kolmannen särmäpalan toisen sivun välisen särmäpalan jälkeinen särmäpala, joka on ensimmäisen palan sivun vastakkaisella sivulla (kuva 81). Tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun käännetään koko kappaletta niin, että kolmas pala kääntyy paikallaan 180 astetta, vaihtavat ensimmäinen ja toinen pala paikkoja keskenään. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 2 = 30$.



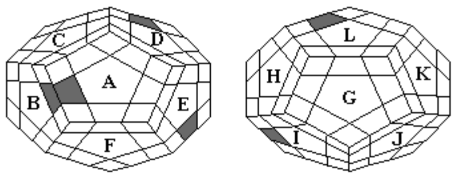
Kuva 81: Särmäpalojen kombinaatio h4

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on CD ja kolmas pala on GI. Tällöin siirto f^{-1} on GH*LAD*. Symmetria huomataan, jos käännetään sivu A sivuksi C ja sivu C sivuksi A.

Joukossa h on yhteensä 240 kombinaatiota.

i. Kaksi palaa on vierekkäisillä sivuilla siten, että toinen on ensimmäisen palan jälkeen myötäpäivään toisen särmäpalan toisella sivulla toinen myötäpäivään. Mitkään kaksi palaa eivät ole samalla sivulla.

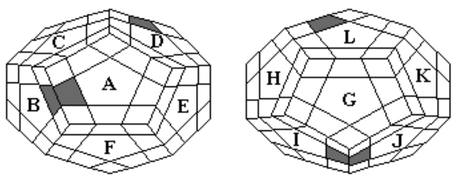
i1. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen palan jälkeen myötäpäivään kolmannen särmäpalan toisella sivulla toinen vastapäivään (kuva 82). Tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun käännetään koko kappaletta niin, että kolmen särmäpalan sivujen ainoa yhteinen kulmapala kääntyy paikallaan 120 astetta, ensimmäinen pala siirtyy toisen paikalle, toinen pala siirtyy kolmannen paikalle ja kolmas pala siirtyy ensimmäisen paikalle. Symmetrian kertaluku on 3. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 3 = 20$.



Kuva 82: Särmäpalojen kombinaatio i1

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on DL ja kolmas pala on EI. Tällöin siirto f^{-1} on D*EF*A^2. Symmetria huomataan, kun pidetään kulmapala ADE paikallaan ja vaihdetaan sivujen A, D ja E paikkoja myötäpäivään ensin kerran ja sen jälkeen uudestaan.

i2. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen sivun vastakkaisen sivun ja ensimmäistä palaa edeltävän särmäpalan toisen sivun välinen särmäpala (kuva 83). Tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun käännetään koko kappaletta niin, että ensimmäinen pala kääntyy paikallaan 180 astetta, vaihtavat toinen ja kolmas pala paikkoja keskenään. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 2 = 30$.

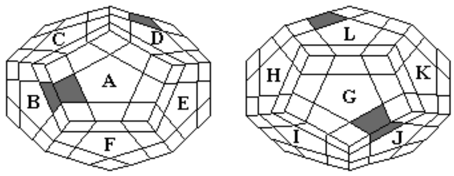


Kuva 83: Särmäpalojen kombinaatio i2

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on DL ja kolmas pala on IJ. Tällöin siirto f^{-1} on D*J*F^{2}A^2. Symmetria huomataan, jos käännetään sivu A sivuksi B ja sivu B sivuksi A.

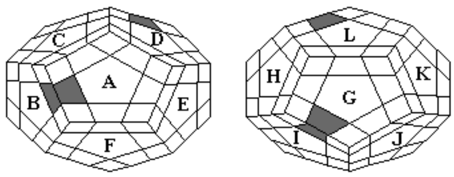
i3. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen sivun vastakkaisen sivun ja ensimmäistä palaa edeltävän särmäpalan toisen sivun välisen särmäpalan jälkeinen särmäpala, joka on ensimmäisen palan sivun vastakkaisella sivulla (kuva 84). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on DL ja kolmas pala on GJ. Tällöin siirto f^{-1} on D*J*^{2}F^{2}A^2.



Kuva 84: Särmäpalojen kombinaatio i3

i4. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen sivun vastakkaisen sivun ja ensimmäisen palan jälkeen myötäpäivään kolmannen särmäpalan toisen sivun välisen särmäpalan jälkeinen särmäpala, joka on ensimmäisen palan sivun vastakkaisella sivulla (kuva 85). Tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun käännetään koko kappaletta niin, että toinen pala kääntyy paikallaan 180 astetta, vaihtavat ensimmäinen ja kolmas pala paikkoja keskenään. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 2 = 30$.



Kuva 85: Särmäpalojen kombinaatio i4

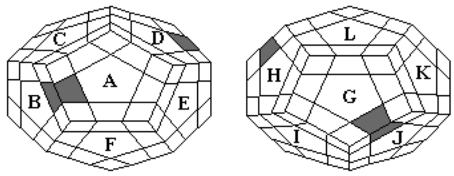
Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on DL ja kolmas pala on GI. Tällöin siirto f^{-1} on $\mathrm{I}^*\mathrm{H}^2\mathrm{AD}^{*2}$. Symmetria huomataan, jos käännetään sivu D sivuksi L ja sivu L sivuksi D.

Joukossa i on yhteensä 140 kombinaatiota.

j. Kaksi palaa on vierekkäisillä sivuilla siten, että toinen on ensimmäisen palan jälkeen myötäpäivään toisen särmäpalan toisella sivulla toinen vastapäivään. Mitkään kaksi palaa eivät ole samalla sivulla.

j1. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen sivun vastakkaisen sivun ja ensimmäistä palaa edeltävän särmäpalan toisen sivun välisen särmäpalan jälkeinen särmäpala, joka on ensimmäisen palan sivun vastakkaisella sivulla (kuva 86). Tämä kuvio on kahdella tavalla symmetrinen. Kun käännetään koko kappaletta siten, että ensimmäinen pala siirtyy toisen paikalle, toinen pala siirtyy kolmannen paikalle ja kolmas pala ensimmäisen. Tämän symmetrian kertaluku on 3. Lisäksi kun ensimmäinen pala käännetään paikoillaan 180 astetta, vaihtavat toinen ja kolmas paikkoja keskenään. Tämän symmetrian kertaluku on 2. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 6 = 10$.

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on DH ja kolmas pala on GJ. Tällöin siirto f^{-1} on $\mathrm{J}^{*2}\mathrm{F}^2\mathrm{D}^{*2}\mathrm{A}^2$. Ensimmäinen symmetria huomataan, jos kään-



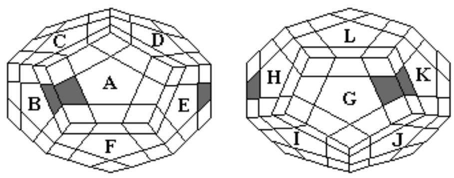
Kuva 86: Särmäpalojen kombinaatio j1

netään sivu B sivuksi D ja sivu A sivuksi H ensin kerran ja sitten uudestaan. Toinen symmetria huomataan, jos käännetään sivu A sivuksi B ja sivu A sivuksi B.

Joukossa j on yhteensä 10 kombinaatiota.

k. Kaksi palaa on vierekkäisillä sivuilla siten, että toinen on ensimmäisen palan jälkeen vastapäivään toisen särmäpalan toisella sivulla toinen myötäpäivään. Mitkään kaksi palaa eivät ole samalla sivulla.

k1. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen sivun vastakkaisen sivun ja ensimmäisen palan toisen sivun välisen särmäpalan jälkeinen särmäpala, joka on ensimmäisen palan sivun vastakkaisella sivulla (kuva 87). Tämä kuvio on kahdella tavalla symmetrinen. Kun käännetään koko kappaletta niin, että ensimmäinen pala siirtyy toisen paikalle, siirtyy toinen kolmannen paikalle ja kolmas ensimmäisen. Tämän symmetrian kertaluku on 3. Lisäksi kun ensimmäinen pala käännetään paikallaan 180 astetta, vaihtavat toinen ja kolmas paikkoja keskenään. Tämän symmetrian kertaluku on 2. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 6 = 10$.



Kuva 87: Särmäpalojen kombinaatio k1

Jos ensimmäinen pala on AB, toinen pala on EH ja kolmas pala on GK. Tällöin siirto f^{-1} on E*K^{2}C*ADC*. Ensimmäinen symmetria huomataan, jos käännetään sivu B sivuksi E ja sivu A sivuksi H ensin kerran ja sitten uudestaan. Toinen symmetria huomataan, jos käännetään sivu A sivuksi B ja sivu A sivuksi B.

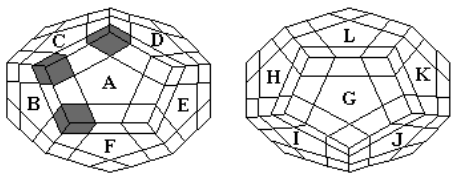
Joukossa k on yhteensä 10 kombinaatiota.

Edellä laskettuja kombinaatioita on yhteensä 4060, mikä on kaikkien särmäpalojen kombinaatioiden määrä. Kaikki mahdolliset särmäpalojen kombinaatiot on siis käyty läpi.

Liite B: Kulmapalojen kombinaatiot

a. Kaikki kolme palaa samalla sivulla.

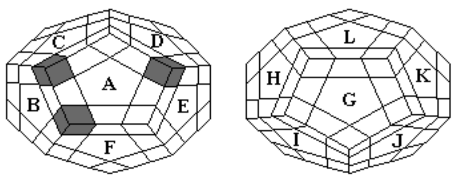
a1. Kaikki kolme palaa vierekkäin (kuva 88). Nämä kolme palaa voivat sijaita yhdellä sivulla viidellä eri tavalla (voidaan ajatella esimerkiksi kolmesta kulmapalasta keskimmäistä palaa, joka voi yhdellä sivulla olla viidessä eri paikassa), ja kyseinen sivu voidaan valita 12 eri vaihtoehdosta. Näin ollen kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



Kuva 88: Kulmapalojen kombinaatio a1

Jos palat ovat ABF, ABC ja ACD, siirto f^{-1} on C$*^2$A. Voidaan myös valita f^{-1} = D*, jos sivu A nimetään sen jälkeen sivuksi C ja sivu B sivuksi L.

a2. Kaksi palaa vierekkäin ja kolmas on niiden välisen särmän vastainen kulma (kuva 89). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



Kuva 89: Kulmapalojen kombinaatio a2

Jos palat ovat ABF, ABC ja ADE, siirto f^{-1} on DC$*^2$A. Itse asiassa riittäisi, jos sivu A nimetään sivuksi C ja sivu B sivuksi L.

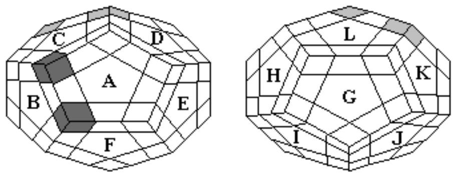
Joukossa a on yhteensä 120 kombinaatiota.

b. Kaksi palaa vierekkäin samalla sivulla ja kolmas tämän sivun puoleisella monitahokkaan puoliskolla.

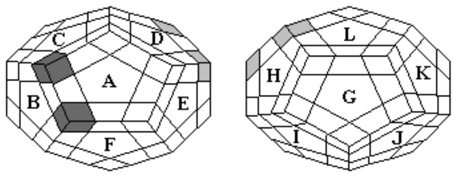
b1. Kaksi palaa vierekkäin ja kolmas toisen palan kolmannella sivulla toinen tai kolmas myötäpäivään (kuva 90). Kombinaatioiden määrä on $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$.

Jos ensimmäiset palat ovat ABF ja ABC, kolmas pala on CKL tai CDL. Palalle CKL siirto f^{-1} on AD ja palalle CDL f^{-1} = C*DA.

b2. Kaksi palaa vierekkäin ja kolmas toisen palan jälkeisen kulman kolmannella sivulla toinen tai kolmas myötäpäivään (kuva 91). Kombinaatioiden määrä on $2 \cdot 5 \cdot 12 = 120$.



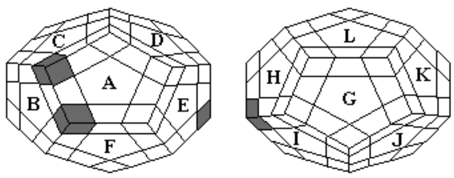
Kuva 90: Kulmapalojen kombinaatio b1



Kuva 91: Kulmapalojen kombinaatio b2

Jos ensimmäiset palat ovat ABF ja ABC, kolmas pala on DHL tai DEH ja siirto f^{-1} on D$*^n$C*DA. Siirtosarjan n on 1 tai 2 siten, että kolmas kulmapala saadaan paikalle CDL. Palalle DHL $n = 1$ ja palalle DEH $n = 2$. Toisaalta palalle DHL riittäisi siirroksi $f^{-1} = \mathrm{D}^2$ ja palalle DEH $f^{-1} = \mathrm{D}$, jos sivu A nimetään sen jälkeen sivuksi C ja sivu B sivuksi L.

b3. Kaksi palaa vierekkäin ja kolmas ensimmäistä edeltävän kulman toisella sivulla toinen vastapäivään (kuva 92). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



Kuva 92: Kulmapalojen kombinaatio b3

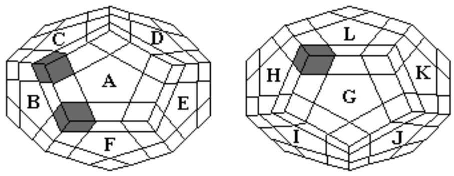
Jos ensimmäiset palat ovat ABF ja ABC, kolmas pala on EHI ja siirto f^{-1} on E$*^2$. Tämän jälkeen sivu A nimetään sivuksi C ja sivu B sivuksi L.

Joukossa b on yhteensä 300 kombinaatiota.

c. Kaksi palaa vierekkäin samalla sivulla ja kolmas tämän sivun vastakkaisen sivun monitahokkaan puoliskolla.

c1. Kaksi palaa vierekkäin ja kolmas tämän sivun vastakkaisella sivulla siten, että se on toisen kulman jälkeisen kulman kolmannen sivun ja ensimmäisen sivun vastakkaisen sivun välisen särmän viereinen kulmapala (kuva 93). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.

Jos ensimmäiset palat ovat ABF ja ABC, kolmas pala on GHL ja siirto f^{-1} on L$*^2$AD.

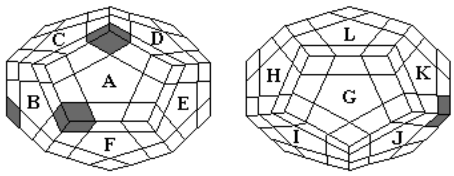


Kuva 93: Kulmapalojen kombinaatio c1

Joukossa c on yhteensä 60 kombinaatiota.

d. Kaksi palaa on samalla sivulla ja kolmas tämän sivun monitahokkaan puoliskolla. Mitkään kaksi palaa eivät ole vierekkäin.

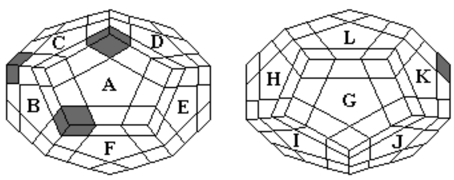
d1. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi kulmapala. Kolmas on ensimmäisen kulman kolmannella sivulla toinen myötäpäivään (kuva 94). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



Kuva 94: Kulmapalojen kombinaatio d1

Jos ensimmäiset palat ovat ABF ja ACD, kolmas pala on BJK ja siirto f^{-1} on CK*C^2A.

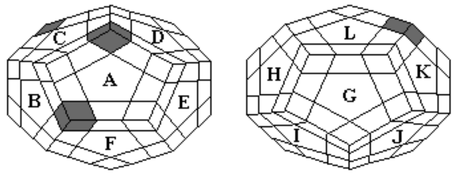
d2. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi kulmapala. Kolmas on ensimmäisen kulman kolmannella sivulla toinen vastapäivään (kuva 95). Kyseessä on yhden kulman kaikki viereiset kulmapalat ja tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun pidetään tätä yhtä kulmaa paikallaan ja käännetään koko kappaletta niin, että ensimmäinen pala siirtyy toisen palan paikalle, siirtyy toinen pala kolmannen paikalle ja kolmas ensimmäisen. Symmetrian kertaluku on 3. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 3 = 20$.



Kuva 95: Kulmapalojen kombinaatio d2

Jos ensimmäiset palat ovat ABF ja ACD, kolmas pala on BCK ja siirto f^{-1} on BC$*^2$B$*^2$. Symmetria huomataan, kun pidetään kulmapala ABC paikallaan ja vaihdetaan sivujen A, B ja C paikkoja myötäpäivään ensin kerran ja sen jälkeen uudestaan.

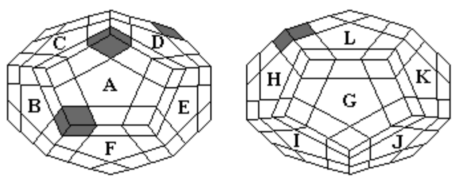
d3. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi kulmapala. Kolmas on toisen kulman toisella sivulla toinen vastapäivään (kuva 96). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



Kuva 96: Kulmapalojen kombinaatio d3

Jos ensimmäiset palat ovat ABF ja ACD, kolmas pala on CKL ja siirto f^{-1} on DA.

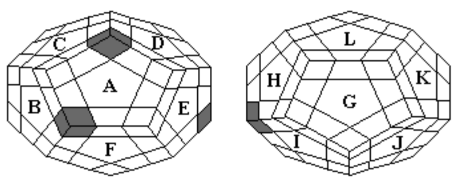
d4. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi kulmapala. Kolmas on toisen kulman kolmannella sivulla toinen myötäpäivään (kuva 97). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



Kuva 97: Kulmapalojen kombinaatio d4

Jos ensimmäiset palat ovat ABF ja ACD, kolmas pala on DHL ja siirto f^{-1} on LC*A.

d5. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi kulmapala. Kolmas on toisen kulman jälkeisen kulman kolmannella sivulla toinen myötäpäivään (kuva 98). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



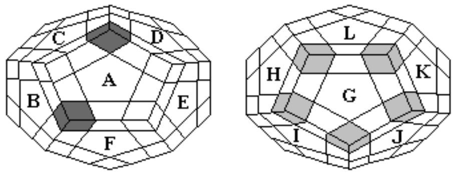
Kuva 98: Kulmapalojen kombinaatio d5

Jos ensimmäiset palat ovat ABF ja ACD, kolmas pala on EHI ja siirto f^{-1} on E$*^2$DC*A.

Joukossa d on yhteensä 260 kombinaatiota.

e. Kaksi palaa samalla sivulla ja kolmas tämän sivun vastakkaisen sivun monitahokkaan puoliskolla. Mitkään kaksi palaa eivät ole vierekkäin.

e1. Kaksi palaa on samalla sivulla niin, että niiden välissä on yksi kulmapala. Kolmas on jokin tämän sivun vastakkaisen sivun kulmista (kuva 99). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 5 \cdot 12 = 300$.



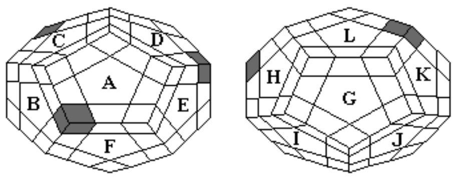
Kuva 99: Kulmapalojen kombinaatio e1

Jos ensimmäiset palat ovat ABF ja ACD, kolmas pala on GHL, GKL, GJK, GIJ tai GHI ja siirto f^{-1} on G^{n}L*DA. Siirtosarjan n on 0, 1, 2, 3 tai 4 siten, että kolmas kulmapala saadaan paikalle GKL. Palalle GHL $n = 1$, palalle GJK $n = 4$, palalle GIJ $n = 3$ ja palalle GHI $n = 2$.

Joukossa e on yhteensä 300 kombinaatiota.

f. Kaksi palaa vierekkäisillä sivuilla siten, että toinen on ensimmäisen palan jälkeisen kulmapalan kolmannella sivulla toinen myötäpäivään. Mitkään kaksi palaa eivät ole samalla sivulla.

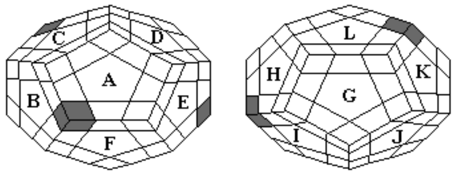
f1. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäisen kulman jälkeen myötäpäivään toisen kulman kolmannella sivulla toinen vastapäivään (kuva 100). Tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun käännetään koko kappaletta niin, että ensimmäinen pala siirtyy toisen palan paikalle, siirtyy toinen pala kolmannen paikalle ja kolmas ensimmäisen. Symmetrian kertaluku on 3. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 3 = 20$.



Kuva 100: Kulmapalojen kombinaatio f1

Jos ensimmäiset palat ovat ABF ja CKL, kolmas pala on DEH ja siirto f^{-1} on D*^{2}A. Symmetria huomataan, kun pidetään kulmapala ACD paikallaan ja vaihdetaan sivujen A, C ja D paikkoja myötäpäivään ensin kerran ja sen jälkeen uudestaan.

f2. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäistä kulmaa edeltävän kulman toisella sivulla toinen vastapäivään (kuva 101). Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 = 60$.



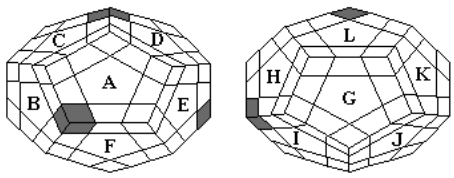
Kuva 101: Kulmapalojen kombinaatio f2

Jos ensimmäiset palat ovat ABF ja CKL, kolmas pala on EHI ja siirto f^{-1} on E*D*^{2}A.

Joukossa f on yhteensä 80 kombinaatiota.

g. Kaksi palaa vierekkäisillä sivuilla siten, että toinen on ensimmäisen palan jälkeisen kulmapalan kolmannella sivulla toinen vastapäivään. Mitkään kaksi palaa eivät ole samalla sivulla.

g1. Kaksi palaa sijaitsevat vierekkäisillä sivuilla edellä mainitulla tavalla. Kolmas pala on ensimmäistä kulmaa edeltävän kulman toisella sivulla toinen vastapäivään (kuva 102). Tämä kuvio on kiertosymmetrinen: kun käännetään koko kappaletta niin, että ensimmäinen pala siirtyy toisen paikalle, siirtyy toinen pala kolmannen paikalle ja kolmas ensimmäisen. Symmetrian kertaluku on 3. Kombinaatioiden määrä on $5 \cdot 12 : 3 = 20$.



Kuva 102: Kulmapalojen kombinaatio g1

Jos ensimmäiset palat ovat ABF ja CDL, kolmas pala on EHI ja siirto f^{-1} on H^{2}LA. Symmetria huomataan, kun pidetään kulmapala ADE paikallaan ja vaihdetaan sivujen A, D ja E paikkoja myötäpäivään ensin kerran ja sen jälkeen uudestaan.

Joukossa g on yhteensä 20 kombinaatiota.

Edellä laskettuja kombinaatioita on yhteensä 1140, mikä on kaikkien kulmapalojen kombinaatioiden määrä. Kaikki mahdolliset kulmapalojen kombinaatiot on siis käyty läpi.